Zajęcia 1: Zbiór liczb rzeczywistych

2024-10-14

Definicja 1. Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ to zbiór spełniający następujące aksjomaty:

1. Aksjomaty ciała, czyli określamy na $\mathbb{R}$ działania dodawania i mnożenia takie, że $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ jest ciałem.
2. Aksjomaty porządku, czyli określamy na $\mathbb{R}$ relację silnego porządku $<$, który jest przechodni, silnie antysymetryczny i liniowy.
3. Aksjomaty zgodności działań z porządkiem, czyli
$$\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}}\ (x<y) \implies (x+z<y+z)$$
$$\forall_{z,y,z\in\mathbb{R}}\ (x<y \land 0<z) \implies (xz<yz)\,.$$
4. Aksjomat ciągłości (zasada ciągłości Dedekinda), który mówi, że zbioru $\mathbb{R}$ nie można podzielić na dwa podzbiory A, B takie, że
$$A, B \neq \emptyset$$
$$\forall_{a\in A, b\in B}\ a<b$$
$$\forall_{a\in A}\ \exists_{\tilde{a}\in A}\ a<\tilde{a}$$
$$\forall_{b\in B}\ \exists_{\tilde{b}\in B}\ \tilde{b}<b.$$

Uwaga. Można wykazać, że $\mathbb{R}$ jest jedynym zbiorem spełniającym te aksjomaty z dokładnością do izomorfizmu.

Twierdzenie 1. Niech $E \neq \emptyset$ będzie ograniczonym z góry (dołu) podzbiorem $\mathbb{R}$. Istnieje $\sup E$ ($\inf E$).

Dowód. Niech B będzie zbiorem ograniczeń górnych zbioru E. Niech $A = \mathbb{R} \setminus B$. Zbiory A, B spełniają trzy pierwsze warunki z aksjomatu ciągłości (trzeci wynika z tego, że $a \in A$ nie jest ograniczeniem górnym E, a więc istnieje $x \in E$ taki, że $a < x$, a definiując $\tilde{a} = \frac{1}{2}(x+a)$ mamy $a < \tilde{a} < x$, gdzie z drugiej nierówności wynika $\tilde{a} \in A$). Zatem musi istnieć takie $b \in B$, że $\forall_{\tilde{b}\in B}\ b \leq \tilde{b}$. Takie b jest elementem najmniejszym zbioru B, a więc właśnie $\sup E$. Analogicznie dowodzimy drugą wersję twierdzenia. □

Twierdzenie 2. Niech $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem ograniczonym. Zachodzi
$$\inf E \leq \sup E$$
$$\inf E = \sup E \implies |E| = 1.$$

Dowód. Niech $e \in E$. Mamy $\inf E \leq e \leq \sup E$. Gdyby E miał element $\tilde{e} > e$, to byłoby $\inf E \leq e < \tilde{e} \leq \sup E$, a więc dla zbiorów wieloelementowych nie może zachodzić równość z wypowiedzi. □

Definicja 2. Zbiór $I \subseteq \mathbb{R}$ nazywamy przedziałem, jeśli
$$\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}}\ (x, z \in I \land x<y<z) \implies y \in I.$$

Twierdzenie 3. Każdy przedział w $\mathbb{R}$ zalicza się do jednej z kategorii:

1. Przedział pusty $\emptyset$.
2. Niepusty przedział ograniczony $[a, b]$, $(a, b]$ i tak dalej (wszystkie kombinacje)
3. Niepusty przedział ograniczony z góry i nieograniczony z dołu $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$
4. Niepusty przedział nieograniczony z góry i ograniczony z dołu $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$
5. Niepusty przedział nieograniczony $\mathbb{R}$.

Dowód. Niech $I \subseteq \mathbb{R}$ będzie niepustym przedziałem. Jeśli jest nieograniczony z góry, to jego prawym końcem będzie $+\infty$. Jeśli jest, to niech $b = \sup I$. Zauważmy, że jeśli $x \in I$ oraz istnieje takie $b \neq y \notin I$, że $x < y < b$, to $[y, b] \nsubseteq I$, a więc cokolwiek z tego przedziału jest ograniczeniem górnym I, co daje sprzeczność z definicją b. Zatem każda liczba mniejsza od b należy do I (do kresu dolnego) i pozostaje tylko decyzja, przy przedział jest domknięty. Analogicznie dla lewego krańca. □

Twierdzenie 4. Niech $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $a_n \leq b_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy $I_n = [a_n, b_n]$. Niech $I_0 \supset I_1 \supset \dots$ Zachodzi

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset.$$

Dowód. Niech $A = \{a_n : a \in \mathbb{N}\}$. Weźmy $a = \sup A$. Mamy $\forall_{p\in\mathbb{N}}\ a_p \leq a$ oraz $\forall_{q\in\mathbb{N}}\ a \leq b_q$ (bo każde b_q jest ograniczeniem górnym A). Zatem $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. □

Twierdzenie 5 (Zasada minimum)**.** Niech $E \subseteq \mathbb{N}$ będzie niepusty. Wtedy E ma element najmniejszy.

Dowód. E jest ograniczony z dołu przez 0, a więc ma infimum $m = \inf E \geq 0$. Musi być $[m, m+1) \cap E \neq \emptyset$, bo inaczej m nie byłoby infimum. W tym przedziale znajduje się dokładnie jedna liczba naturalna n, a więc $m = n \in E$. □

Twierdzenie 6 (Zasada indukcji)**.** Jeśli dla $E \subseteq \mathbb{N}$ zachodzi $0 \in E$ oraz $n \in E \implies n+1 \in E$, to $E = \mathbb{N}$.

Dowód. Przypuśćmy, że $\mathbb{N} \backslash E \neq \emptyset$. Wtedy ten zbiór ma element najmniejszy $k \neq 0$. Zatem $k-1 \in E$, a więc $k \in E$ – sprzeczność $\lightning$. □

Twierdzenie 7. Zbiór $\mathbb{R}$ jest nieprzeliczalny.

Dowód. Przypuśćmy, że $\mathbb{R} = \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$. Wybieramy ciąg przedziałów $\{I_n\}$ taki, że

$$I_0 = [a_0, b_0], c_0 \notin I_0$$

$$\vdots$$

$$I_n = [a_n, b_n],\ c_n \notin I_n,\ I_n \subseteq I_{n-1}.$$

Możemy tak zrobić, bo jeśli $c_n \in [a_{n-1}, b_{n-1}]$, to wystarczy wziąć $b_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + c_n)$, $a_n = a_{n-1}$.

Teraz $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$ (bo nie zawiera żadnej liczby rzeczywistej), ale wiemy, że takie przecięcie jest niepuste – $\lightning$. □

Wniosek. Każdy przedział $I \subseteq \mathbb{R}$ mający co najmniej dwa elementy jest nieprzeliczalny.

Definicja 3. Przestrzenią metryczną nazywamy parę (X, d), gdzie X jest zbiorem a funkcja

$$d : X \times X \ni (x, y) \to d(x, y) \in [0, +\infty)$$

jest nazywana metryką i spełnia własności:

1. $\forall_{x,y\in X}\ d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\forall_{x,y\in X}\ d(x, y) = d(y, x)$ (symetria)
3. $\forall_{x,y,z\in X}\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (nierówność trójkąta).

Definicja 4. Jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną oraz $a \in X$ i $r \in (0, +\infty)$, to zbiory

$$K(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\},$$

$$\overline{K}(a, r) = \{x \in X : d(x, a) \leq r\},$$

$$S(a, r) = \{x \in X : d(x, a) = r\}$$

nazywamy kolejno kulą otwartą, kulą domkniętą oraz sferą o środku a i promieniu r.

Definicja 5. Ustalmy przestrzeń metryczną (X, d). Zbiór $U \subseteq X$ nazywamy otwartym, jeśli

$$\forall_{a \in U}\ \exists_{r>0}\ K(a, r) \subseteq U.$$

Rodzinę wszystkich podzbiorów otwartych nazywamy topologią (X, d) i oznaczamy ją $\mathrm{top}_d X$. Zauważmy, że $\emptyset, X \in \mathrm{top}_d X$.

Definicja 6. Otoczeniem punktu $a \in X$ nazywamy każdy zbiór otwarty go zawierający.

Definicja 7. Zbiór $F \subseteq X$ nazywamy domkniętym w X, jeśli F^c jest otwarty w X.

Definicja 8. Dla $A \subseteq X$ wnętrzem zbioru A nazywamy zbiór

$$\operatorname{int} A = \bigcup \{U : U \text{ otwarty w } X, U \subseteq A\}.$$

Elementy tego zbioru to punkty wewnętrzne A.

Definicja 9. Dla $A \subseteq X$ domknięciem zbioru A nazywamy zbiór

$$\overline{A} = \bigcap \{F : F \text{ domknięty w } X, A \subseteq F\}.$$

Definicja 10. Brzegiem zbioru A nazywamy zbiór

$$\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A.$$

Jego elementy nazywamy punktami brzegowymi A.

Propozycja 1. Zbiór $\operatorname{int} A$ jest otwarty, a $\overline{A}$ i ∂A są domknięte.

Dowód. $\operatorname{int} A$ jest otwarty jako suma zbiorów otwartych. Podobnie $\overline{A}$ jest przecięciem zbiorów domkniętych. Mamy $\partial A = \overline{A} \cap (\operatorname{int} A)^c$, co jest przecięciem zbiorów domkniętych. □

Definicja 11. Podzbiór A przestrzeni metrycznej (X, d) nazywamy:

1. ograniczonym, jeśli $\exists_{a \in X, r>0}\ A \subseteq \overline{K}(a, r)$
2. brzegowym, jeśli $\operatorname{int} A = \emptyset$
3. gęstym w X, jeśli $\overline{A} = X$
4. nigdziegęstym, jeśli $\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset$

Propozycja 2. Jeśli A jest nigdziegęsty, to jest brzegowy.

Dowód. Mamy $A \subseteq \overline{A}$, bo $\overline{A}$ jest przecięciem zbiorów, z których każdy zawiera A. Podobnie $\operatorname{int} A \subseteq \operatorname{int} \overline{A}$, bo każdy zbiór otwarty zawierający się w A zawiera się też w $\overline{A}$. □

Propozycja 3. Zbiór A jest brzegowy wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $X \setminus A$ jest gęsty.

Dowód. ($\Longrightarrow$) Jeśli A jest brzegowy, to każde otoczenie dowolnego punktu z A zawiera punkt z A^c. Zatem $\overline{A^c}$ zawiera też wszystkie punkty z A, bo gdyby nie zawierał jakiegoś $a \in A$, to istnieje zbiór domknięty zawierający A^c, który nie zawiera a, a więc jego otwarte dopełnienie zawiera a i istnieje otoczenie a, w którym nie ma punktu z A^c.

($\Longleftarrow$) Zbiór $\overline{A^c}$ zawiera wszystkie punkty z A, a więc podobnie jak przedtem każde otoczenie każdego punktu z A zawiera punkt z A^c i $\operatorname{int} A = \emptyset$. □

Definicja 12. Element $a \in X$ nazywamy punktem skupienia zbioru A, jeśli dla każdego U będącego otoczeniem a zachodzi
$$(U \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset.$$
Zbiór punktów skupienia oznaczamy A'. Punkty zbioru $A \setminus A'$ nazywamy punktami izolowanymi zbioru A.

Przykład (Metryka dyskretna)**.** Określając na zbiorze X funkcję
$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$
dostajemy metrykę zwaną metryką dyskretną.

Przykład (Metryka przeniesiona przez injekcję)**.** Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną a funkcja $\varphi : Y \to X$ injekcją . Przyjmując
$$g(x,y) = d(\varphi(x), \varphi(y))$$
dla $x, y \in Y$ dostajemy przestrzeń metryczną (Y, g).

Przykład (Iloczyn przestrzeni metrycznych)**.** Jeśli $(X_1, d_1), \ldots, (X_m, d_m)$ są przestrzeniami metrycznymi, to dla krotek elementów z nich $x = (x_1, \ldots, x_m), y = (y_1, \ldots, y_m)$ określamy
$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{m} d_i(x_i, y_i)$$
i otrzymujemy przestrzeń metryczną na iloczynie kartezjańskim.

Definicja 13. Dla przestrzeni metrycznej (X,d) oraz zbioru $Y \subseteq X$ funkcja $d\mid_{Y\times Y}$ jest metryką na Y zwaną metryką indukowaną. Parę $(Y, d\mid_{Y\times Y})$ nazywamy podprzestrzenią metryczną (X,d).

Definicja 14. Moduł liczby rzeczywistej x to funkcja
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Definicja 15. Metryką euklidesową na $\mathbb{R}$ nazywamy funkcję
$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x,y) \to |x - y| \in [0, +\infty).$$
Jest ona metryką, a kule w niej to przedziały (odpowiednio otwarte i domknięte).

Twierdzenie 8 (O istnieniu pierwiastków)**.** Niech $x \in [0, +\infty)$ oraz $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Istnieje jedyny taki $y \in \mathbb{R}$, że $y \geq 0$ oraz $y^n = x$.

Dowód. Dla $0 \leq y_1 \leq y_2$ mamy $y_1^n \leq y_2^n$. Zatem jedyność jest oczywista. Mamy $y^n = 0 \iff y = 0$. Wystarczy rozważyć $x > 0$.

Zauważmy, że dla $0 < a < b$ jest
$$b^n - a^n = (b-a)\left(b^{n-1} + b^{n-2}a + \ldots + a^{n-1}\right) \leq (b-a) \cdot nb^{n-1}.$$

Określmy zbiór $E = \{t \in (0, +\infty) : t^n < x\}$. Kładąc $t_x = \frac{x}{x+1} < 1$ mamy $t_x^n < t_x < x$, a więc E jest niepusty. Jednocześnie $x + 1$ jest jego ograniczeniem górnym, gdyż
$$t \in E \implies t^n < x \implies t^n < x + 1 \implies t^n < (x+1)^n \implies t < x + 1.$$

Zatem możemy określić $y = \sup E$. Pokażemy, że $y^n = x$.

Przypuśćmy, że $y^n < x$. Pokażemy, że istnieje takie $h > 0$, że $(y+h)^n < x$, co da sprzeczność z definicją y. Mamy

$$(y+h)^n = y^n + ((y+h)^n - y^n) \leq y^n + hn\,(y+h)^{n-1},$$

a więc wystarczy znaleźć takie h, że

$$y^n + hn\,(y+h)^{n-1} < x,$$

co dla $h \in (0,1)$ jest spełnione przez dowolne $h < \frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}} \leq \frac{x-y^n}{n(y+h)^{n-1}}$, które oczywiście istnieje.

Przypuśćmy, że $y^n > x$. Pokażemy, że istnieje $h \in (0,y)$ takie, że $(y-h)^n > x$, a więc y nie jest najmniejszym ograniczeniem górnym. Podobnie jak przedtem dostajemy nierówność

$$(y-h)^n = y^n - (y^n - (y-h)^n) \geq y^n - hny^{n-1} > x,$$

a spełniające ją h na pewno istnieje. □

Definicja 16. Liczbę $y \in [0,+\infty)$ taką, że $y^n = x$ dla $x \in [0,+\infty)$ nazywamy n-tym pierwiastkiem liczby x i oznaczamy ją $\sqrt[n]{x}$.

Zajęcia 2: Rozszerzone liczby rzeczywiste i zespolone

2024-11-04

Definicja 17. Rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych to zbiór $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$, gdzie $\pm\infty \notin \mathbb{R}$ oraz $+\infty \neq -\infty$.

Definicja 18 (Porządek na $\overline{\mathbb{R}}$)**.** Przyjmujemy $-\infty < +\infty$ oraz $\forall_{x\in\mathbb{R}} \; -\infty < x, x < +\infty$. To daje naturalną definicję przedziałów $[-\infty, x)$ i innych tego typu.

Propozycja 4. Każdy zbiór w $\overline{\mathbb{R}}$ jest ograniczony o kresach w $\overline{\mathbb{R}}$.

Dowód. Jeśli jest ograniczony w $\mathbb{R}$, to w $\overline{\mathbb{R}}$ ma taki sam kres, a jeśli nie, to jest nim jedna z nieskończoności. □

Uwaga. Mamy $\inf\emptyset = +\infty$ oraz $\sup\emptyset = -\infty$.

Definicja 19. Dodawanie na elementach $\overline{\mathbb{R}}$ definiujemy tak, jak podpowiada intuicja. Dodatkowo (nie jest to standardowe) zakładamy, że $+\infty + (-\infty) = 0$.

Definicja 20. Definiujemy moduł $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$.

Definicja 21. Metrykę na $\overline{\mathbb{R}}$ definiujemy za pomocą funkcji

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x = +\infty \\ \frac{x}{1+|x|}, & x \in \mathbb{R} \\ -1, & x = -\infty \end{cases},$$

która jest bijekcją. Teraz możemy zdefiniować $\overline{d}\,(x,y) := d\,(\varphi(x),\varphi(y)) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$ dla $x,y \in \overline{\mathbb{R}}$. W ten sposób mamy przestrzeń metryczną $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$, w której największa odległość to $\overline{d}\,(-\infty,+\infty) = 2$.

Definicja 22 (Liczby zespolone)**.** W zbiorze $\mathbb{R}^2$ wprowadzamy strukturę ciała:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

dla $z_i = (x_i, y_i)$. Trójka $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ jest ciałem o $0 := (0,0)$ oraz $1 := (1,0)$. Otrzymane ciało oznaczamy $\mathbb{C}$ i nazywamy liczbami zespolonymi. Często piszemy $(x,y) = x + iy$.

Uwaga. Ciało $\mathbb{R}$ zanurza się w $\mathbb{C}$ za pomocą injekcji $x \to (x, 0)$.

Propozycja 5. W $\mathbb{C}$ zachodzi nierówność trójkąta

$$|z+w| \leq |z| + |w|.$$

Dowód.

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)\left(\overline{z+w}\right) = (z+w)\left(\overline{z}+\overline{w}\right) = |z|^2 + |w|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w = |z|^2 + |w|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}\left(z\overline{w}\right) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2\left|z\overline{w}\right| = \left(|z| + |w|\right)^2.\end{aligned}$$

□

Definicja 23. Wprowadzamy metrykę na $\mathbb{C}$ za pomocą modułu:

$$d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \ni (z,w) \to d(z,w) = |z-w| \in [0, +\infty).$$

Moduł jest tu tożsamy z długością wektora $z \in \mathbb{C}$, a kule nazywamy często kołami, bo tak wyglądają na płaszczyźnie.

Twierdzenie 9 (Nierówność Cauchy'ego-Schwarza)**.** Niech $z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$. Zachodzi

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k}\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2}.$$

Dowód. Kładziemy $A = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2$, $B = \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2$, $C = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k}$. Mamy

$$B = 0 \iff w_1 = \ldots = w_n = 0$$

i wtedy obie strony nierówności się zerują. Teraz $B > 0$ i przekształcamy

$$\begin{aligned}0 &\leq \sum_{k=1}^{n} |Bz_k - Cw_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} B^2 z_k \overline{z_k} + C\overline{C} w_k \overline{w_k} - B\overline{C} z_k \overline{w_k} - BC\overline{z_k} w_k \\ &= B^2 A + |C|^2 B - BC \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k} w_k - B\overline{C} \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k} \\ &= B^2 A + |C|^2 B - \left(BC\overline{C} + B\overline{C}C\right) = B\left(AB - |C|^2\right).\end{aligned}$$

Zatem $AB - |C|^2 \geq 0$, a to daje tezę: $|C| \leq \sqrt{A}\sqrt{B}$. □

Definicja 24 (Sfera Riemanna)**.** Wybieramy element $\infty \notin \mathbb{C}$ i określamy $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Taki zbiór nazywamy płaszczyzną domkniętą lub sferą Riemanna.

Definicja 25. Rozważmy zbiór $\mathbb{S} = \left\{\left((x,y), t\right) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 + t^2 = t\right\}$. Jest on sferą w $\mathbb{R}^3$ o środku w $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ i promieniu $\frac{1}{2}$. Możemy rzutować punkty płaszczyzny podporowej (zespolonej) na sferę, łącząc je z północnym biegunem sfery. Jest to odwracalne przekształcenie

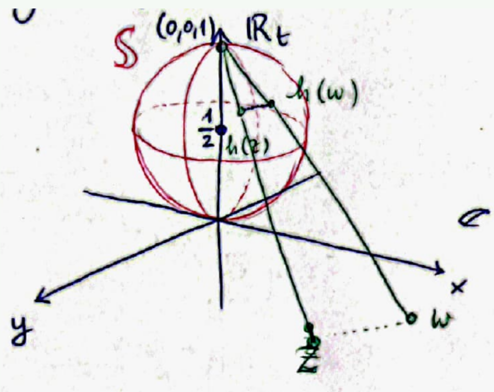
$$h(z) = h(x,y) = \left(\frac{x}{1+|z|^2}, \frac{y}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2}{1+|z|^2}\right),$$

które uzupełniamy do bijekcji $H : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{S}$ kładąc $H(\infty) = (0, 0, 1)$.

Po zastosowaniu na $\mathbb{S}$ metryki euklidesowej dostajemy na $\hat{\mathbb{C}}$ metrykę przeniesioną przez bijekcję:

$$g(z,w) = \frac{|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}},$$

$$g(z,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}.$$



Rysunek 1: Sfera Riemanna wraz z rzutem na płaszczyznę.

Notacja. Wszędzie tam, gdzie dowód dla $\mathbb{R}$ przebiega tak samo jak dla $\mathbb{C}$, będziemy pisać $\mathbb{K}$.

Zajęcia 3: Zbieżność

2024-12-02

Definicja 26. Ciągiem w zbiorze X nazywamy dowolną funkcję $\mathbb{N} \ni n \to a_n \in X$. Ciąg oznaczamy $\{a_n\}$ lub $\{a_n\}_1^\infty$ lub (a_n) lub $(a_n)_1^\infty$.

Definicja 27. Jeśli $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są ciągami w zbiorze X, to mówimy, że $\{b_n\}$ jest podciągiem $\{a_n\}$, jeśli istnieje ściśle rosnąca funkcja $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taka, że $b_n = a_{\varphi(n)}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Definicja 28. Mówimy, że ciągi $\{a_n\}$ oraz $\{b_n\}$ różnią się wyrazami początkowymi, jeśli istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że $\forall_{n \geq N}\ b_n = a_n$.

Definicja 29. Niech $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie bijekcją. Mówimy, że $\{b_n\}$ jest permutacją ciągu $\{a_n\}$, jeśli $b_n = a_{\sigma(n)}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Jest to permutacja zadana przez σ.

Definicja 30. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, $\{a_n\}$ ciągiem w X oraz $a \in X$. Mówimy, że a jest granicą ciągu $\{a_n\}$, jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq N}\ d(a_n, a) < \varepsilon.$$

Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy zbieżnym do granicy a, co zapisujemy $a_n \to a$ $(n \to +\infty)$ albo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Uwaga. Warunek $d(a_n, a) < \varepsilon$ jest równoważny $a_n \in K(a, \varepsilon)$. Zatem ciąg jest zbieżny do a, jeśli w dowolnym otoczeniu a leżą prawie wszystkie jego wyrazy. To pozwala zdefiniować zbieżność w przestrzeni topologicznej.

Notacja. Napis $\exists_{N\in\mathbb{N}}\,\forall_{n\geq N}$ często skracamy do zapisu $n \gg 1$, co czytamy: dla odpowiednio dużych n.

Propozycja 6. Zachodzi $a_n \to a \iff d(a_n, a) \to 0$.

Dowód. Mamy $d(a_n, a) < \varepsilon \iff |d(a_n, a) - 0| < \varepsilon$, a więc definicje są sobie równoważne. □

Propozycja 7. Jeśli $a_n \to a$ i wybierzemy podciąg $(a_{n_k}) \subseteq (a_n)$, to $a_{n_k} \to a\ (k \to \infty)$.

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Wybierzmy takie N, że $\forall_{n\geq N}\ d(a_n, a) < \varepsilon$. Niech $K \in \mathbb{N} : \forall_{k\geq K}\ n_k \geq N$. Wtedy $\forall_{k\geq K}\ d(a_{n_k}, a) < \varepsilon$, a to chcieliśmy. □

Twierdzenie 10. Ciąg w przestrzeni metrycznej (X, d) może mieć co najwyżej jedną granicę.

Dowód. Załóżmy, że dla $b_1, b_2 \in X$ takich, że $b_1 \neq b_2$ mamy $a_n \to b_1$ oraz $a_n \to b_2$. Weźmy $\varepsilon = \frac{1}{2}d(b_1, b_2)$. W każdej z kul $K(b_1, \varepsilon)$, $K(b_2, \varepsilon)$ leżą prawie wszystkie wyrazy $\{a_n\}$, ale z nierówności trójkąta jest $K(b_1, \varepsilon) \cap K(b_2, \varepsilon) = \emptyset$, co daje sprzeczność. □

Uwaga. To twierdzenie nie działa w przestrzeniach topologicznych.

Definicja 31. Mówimy, że a jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$, jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0, N\in\mathbb{N}}\ \exists_{n\geq N}\ d(a_n, a) < \varepsilon.$$

Słownie: dowolnie blisko a leżą dowolnie duże elementy $\{a_n\}$.

Twierdzenie 11. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, $\{a_n\}$ ciągiem w X, $a \in X$. Punkt a jest punktem skupienia $\{a_n\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\{b_n\}$ będący podciągiem $\{a_n\}$ taki, że $b_n \to a$.

Dowód. ($\Longrightarrow$) Zdefiniujmy $\{a_{n_k}\}$ w następujący sposób: dla każdego $k \in \mathbb{N}$ niech a_{n_k} będzie takim elementem ciągu $\{a_n\}$, że $d(a_{n_k}, a) < \frac{1}{2^k}$ oraz $n_k > n_i$ dla każdego $i < k$. Taki element istnieje, bo a jest punktem skupienia. Określony ciąg oczywiście jest zbieżny do a.

($\Longleftarrow$) Jeśli podciąg $\{b_n\}$ jest zbieżny do a, to dla każdego $\varepsilon > 0$ prawie wszystkie elementy $\{b_n\}$ są odpowiednio blisko a. Zatem w szczególności istnieją dowolnie duże elementy będące odpowiednio blisko a. □

Propozycja 8. W przestrzeni metrycznej (X, d) ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do $a \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego jego podciągu da się wybrać podciąg zbieżny do a.

Dowód. ($\Longrightarrow$) Jeśli $\{a_n\}$ jest zbieżny do a, to każdy jego podciąg też.

($\Longleftarrow$) Załóżmy, że $\{a_n\}$ nie jest zbieżny do a, czyli istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że dla nieskończenie wielu elementów $\{a_n\}$ zachodzi $d(a_n, a) > \varepsilon$. Rozważmy podciąg składający się z tych elementów. Musi on mieć podciąg zbieżny do a, co daje sprzeczność, bo wszystkie jego wyrazy są oddalone od a o co najmniej ε. □

Twierdzenie 12. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, niech $A \subseteq X$. A jest domknięty w X wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $\{a_n\} \subseteq A$ o granicy a zachodzi $a \in A$.

Dowód. ($\Longrightarrow$) Niech $\{a_n\} \subseteq A$ będzie ciągiem, a $a \in X$ jego granicą. Jeśli $a \notin A$, to $U = A^c$ jest otwartym otoczeniem a. Zatem prawie wszystkie wyrazy $\{a_n\}$ leżą w U, czyli poza A – sprzeczność.

($\Longleftarrow$) Jeśli A nie jest domknięty, to $\overline{A} \setminus A \neq \emptyset$. Wybieramy $a \in \overline{A} \setminus A$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $A \cap K(a, 2^{-n}) \neq \emptyset$, bo do domknięcia należą te punkty, które mają dowolnie blisko siebie punkt z A. Wybierając $a_n \in A$ tak, by $a_n \in K(a, 2^{-n})$ dostajemy ciąg zbieżny do a, a więc powinno być $a \in A$ – sprzeczność. □

Twierdzenie 13. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, $A \subseteq X$, $a \in X$. $a \in A'$ (jest punktem skupienia A) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $\{a_n\} \subseteq A \setminus \{a\}$ taki, że $a_n \to a$.

Dowód. ($\implies$) a jest punktem skupienia, a wiec dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\left(K\left(a, 2^{-n}\right) \setminus \{a\}\right) \cap A \neq \emptyset.$$

Biorąc a_n jako element tego zbioru dostajemy ciąg zbieżny do a.

($\impliedby$) Dla każdego otoczenia a prawie wszystkie elementy $\{a_n\}$ do niego należą. Zatem dowolne otoczenie ma niepuste przecięcie z $A \setminus \{a\}$. □

Twierdzenie 14. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, $A \subseteq X$. Zachodzi $\overline{A} = A \cup A'$.

Dowód. Mamy $A \cup A' \subseteq \overline{A}$, bo jeśli $a \in A'$, to istnieje ciąg w $A \setminus \{a\}$ zbieżny do a, a zatem jest to też ciąg w A i $a \in \overline{A}$ z domkniętości $\overline{A}$. Biorąc $a \in \overline{A}$ możemy znaleźć ciąg $\{a_n\}$ w A zbieżny do a – mamy $K\left(a, 2^{-n}\right) \cap A \neq \emptyset$. Jeśli $a \notin A$, to jest to ciąg w $A \setminus \{a\}$, a więc $a \in A'$. Z tego wynika $\overline{A} \subseteq A \cup A'$. □

Definicja 32. Średnicą zbioru $A \subseteq X$ nazywamy element zbioru $[0, +\infty]$ określony równością

$$\operatorname{diam} A = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ \sup d\left(A \times A\right), & A \neq \emptyset \end{cases},$$

gdzie supremum określamy w $\overline{\mathbb{R}}$.

Propozycja 9. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, $A \subseteq X$. Następujące warunki są równoważne:

1. A jest zbiorem ograniczonym
2. $\operatorname{diam} A < +\infty$
3. $\forall_{a \in X}\ \exists_{r>0}\ \overline{K}\left(a, r\right) \supset A$.

Dowód. ($1 \implies 2$) Jeśli A jest ograniczony to zawiera się w pewnej kuli $K\left(b, r\right)$. Zatem dla dowolnych $a, a' \in A$ jest $d\left(a, a'\right) \leq d\left(a, b\right) + d\left(a', b\right) \leq 2r$.

($2 \implies 3$) Niech $\operatorname{diam} A = t$. Niech $a' \in A$ (dla pustego A teza oczywista). Biorąc $r = d\left(a, a'\right) + t$ dostajemy odpowiednią kulę.

($3 \implies 1$) Dowolna taka kula świadczy o ograniczeniu zbioru. □

Definicja 33. Ciąg $\{a_n\}$ w przestrzeni metrycznej (X, d) nazywamy ograniczonym, jeśli zbiór jego wyrazów $\{a_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$ jest ograniczony.

Propozycja 10. Ciąg zbieżny w (X, d) jest ograniczony.

Dowód. Niech ciąg $\{a_n\}$ będzie zbieżny do a. Niech $N \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $\forall_{n \geq N}\ d\left(a_n, a\right) < 1$. Mamy $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \overline{K}\left(a, \max\left(1, \max_{i<N}\left\{d\left(a_i, a\right)\right\}\right)\right)$. □

Definicja 34 (Ciąg Cauchy'ego)**.** Ciąg $\{a_n\}$ w przestrzeni metrycznej (X, d) nazywamy ciągiem Cauchy'ego, jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N \in \mathbb{N}}\ \forall_{p,q \geq N}\ d\left(a_p, a_q\right) < \varepsilon.$$

Mówimy o takim ciągu, że spełnia warunek Cauchy'ego.

Definicja 35 (Przestrzeń zupełna)**.** Mówimy, że przestrzeń metryczna (X, d) jest zupełna, jeśli każdy ciąg Cauchy'ego w niej jest zbieżny.

Twierdzenie 15. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, a $\{a_n\}$ ciągiem w niej. Zachodzą następujące wynikania:

1. $\{a_n\}$ jest zbieżny $\implies$ $\{a_n\}$ jest Cauchy'ego

2. $\{a_n\}$ jest Cauchy'ego $\implies$ $\{a_n\}$ jest ograniczony
3. $\{a_n\}$ jest Cauchy'ego i ma podciąg zbieżny $\implies$ $\{a_n\}$ jest zbieżny

Dowód. (1) Wybieramy $\varepsilon > 0$. Jeśli $a_n \to a$, to istnieje takie N, że dla $n \geq N$ jest $d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Zatem dla $p, q \geq N$ jest $d(a_p, a_q) \leq d(a_p, a) + d(a_q, a) \leq \varepsilon$.

(2) Niech $N \in \mathbb{N}$ będzie takie, że dla $p, q \geq N$ jest $d(a_p, a_q) < 1$. Dla $r = 1 + \sum_{n=0}^{N} d(a_n, a_N)$ wyrazy $\{a_n\}$ zawierają się w $\overline{K}(a_N, r)$.

(3) Niech $\{b_n\}$ będzie podciągiem $\{a_n\}$ zbieżnym do b. Ustalmy $N, \tilde{N}$ takie, że dla $n \geq N$ jest $d(b_n, b) < \frac{\varepsilon}{2}$ oraz dla $p, q \geq \tilde{N}$ jest $d(a_p, a_q) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dla $p \geq M = \max\left\{N, \tilde{N}\right\}$ mamy

$$d(a_p, b) \leq d(a_p, b_M) + d(b_M, b) < \varepsilon,$$

bo $b_M = a_q$ dla pewnego $q \geq M$. $\square$

Uwaga. Zmiana początkowych wyrazów oraz permutacja ciągu nie mają wpływu na jego zbieżność, punkty skupienia, ograniczenie i warunek Cauchy'ego.

Zajęcia 4: Zbieżność w ciele

2025-01-02

Twierdzenie 16. Dla ciągu $\{a_n\}$ w ciele $\mathbb{K}$ zbieżnego do $a \in \mathbb{K}$ zachodzi:

1. $(-a_n) \to (-a)$
2. $|a_n| \to |a|$
3. jeśli $a \neq 0$, to $a_n \neq 0$ dla $n \gg 1$ oraz $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$.

Dowód. (1) Wprost z $|(-a_n) - (-a)| = |a_n - a|$.

(2) Podobnie, za pomocą odwróconej nierówności trójkąta $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$, którą dowodzimy rozpisując $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$ i podobnie $|y| \leq |y - x| + |x|$, a więc $\pm(|x| - |y|) \leq |x - y|$.

(3) Bierzemy $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$. Mamy $|a_n - a| < \varepsilon$ dla $n \gg 1$, a więc $|a_n| \geq |a| - |a_n - a| \geq |a| - \varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0$. Korzystając z tej nierówności $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a_n - a|}{|a_n||a|} \leq 2\frac{|a_n - a|}{|a|^2} \to 0$. $\square$

Twierdzenie 17. Operacja granicy jest zgodna z czterema podstawowymi działaniami (z dzieleniem, o ile granica dzielnika nie jest zerowa).

Dowód. Pokażemy tylko $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$. Dodawanie i odejmowanie oczywiste, dzielenie wynika z mnożenia. Mamy

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| = |a_n| |b_n - b| + |a_n - a| |b|,$$

a że ciągi zbieżne są ograniczone, to mamy $|a_n| \leq \tilde{M}$ dla pewnego $\tilde{M}$. Biorąc $M = \max\left\{\tilde{M}, |b|\right\}$ dostajemy $|a_n b_n - ab| \leq M(|a_n - a| + |b_n - b|)$, co zmierza do 0. $\square$

Twierdzenie 18 (Bolzano-Weiserstrassa)**.** Każdy ograniczony ciąg liczb rzeczywistych $\{a_n\}$ ma podciąg zbieżny.

Dowód. Z ograniczenia $\{a_n\}$ istnieje taki przedział $I_0 = [b_0, c_0]$, że $a_n \in I_0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Mając ustalony $I_n = [b_n, c_n]$ rozważmy przedziały $[b_n, \frac{b_n + c_n}{2}]$ oraz $[\frac{b + c_n}{2}, c_n]$. Definiujemy jako I_{n+1} ten z nich, w którym leży nieskończenie wiele wyrazów $\{a_n\}$ (w którymś na pewno, bo początkowo w I_0 są wszystkie). Dostajemy rodzinę przedziałów zstępujących, a więc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. Weźmy $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Łatwo zauważyć, że $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{a\}$, bo diam $I_n \to 0$. Dla ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieje takie n, że $I_n \subseteq (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, czyli w tym przedziale jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. A więc w dowolnym otoczeniu a są wyrazy ciągu, czyli a jest punktem skupienia. Z tego wynika, że istnieje podciąg o granicy w a. $\square$

Wniosek. Każdy ograniczony ciąg liczb rzeczywistych ma punkt skupienia w $\mathbb{R}$.

Twierdzenie 19. Przestrzeń $\mathbb{R}$ z naturalną metryką jest przestrzenią zupełną.

Dowód. Jeśli $\{a_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego, to jest ograniczony. Ciąg ograniczony ma podciąg zbieżny, a ciąg Cauchy'ego ze zbieżnym podciągiem jest zbieżny. $\square$

Twierdzenie 20. Niech $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ będzie rosnącym (malejącym) ciągiem ograniczonym z góry (dołu). Wtedy $\{a_n\}$ jest zbieżny.

Dowód. Rosnący ciąg ograniczony z góry jest ograniczony, więc ma punkt skupienia $a \in \mathbb{R}$. Zatem mamy

$$\forall_{\varepsilon>0, N\in N}\ \exists_{n\geq N}\ \ |a_n - a| < \varepsilon,$$

a że ciąg jest rosnący, to będzie to zachodziło dla każdej liczby większej niż n (jest $a_n < a$, bo inaczej będziemy się tylko od niego oddalać i nie będzie punktem skupienia).

Inny dowód: bierzemy $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dla $\varepsilon > 0$ istnieje n_0 takie, że $a - \varepsilon < a_{n_0}$. Zatem dla $n \geq n_0$ jest

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon,$$

czyli $|a - a_n| < \varepsilon$.

Dowód drugiego wariantu analogiczny. $\square$

Lemat 1. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem w $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ w $\mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ w $\overline{\mathbb{R}}$.

Dowód. ($\Longrightarrow$) Mamy

$$\begin{aligned}\overline{d}(a_n, a) &= \left|\frac{a_n}{1+|a_n|} - \frac{a}{1+|a|}\right| = \left|\frac{a_n + a_n|a| - a - a|a_n|}{(1+|a_n|)(1+|a|)}\right| \\ &\leq |a_n - a| + |a_n|a| - a|a_n|| = |a_n - a| + |a_n|a| - a|a| + a|a| - a|a_n|| \\ &\leq |a_n - a| + |a|\,|a_n - a| + |a|\,||a| - |a_n||,\end{aligned}$$

gdzie pierwsza nierówność to przeszacowanie mianownika przez 1 i nierówność trójkąta. Widzimy, że ostatnie wyrażenie dąży do 0.

($\Longleftarrow$) Zdefiniujmy funkcję $\psi(x) = \begin{cases} -\infty, & x = -1 \\ \frac{x}{1-|x|}, & x \in (-1, 1) \\ +\infty, & x = 1 \end{cases}$. Jest ona odwrotnością bijekcji φ między $\mathbb{R}$ a $\overline{\mathbb{R}}$ pokazanej wcześniej. Zakładając, że $|\varphi(a_n) - \varphi(a)| \to 0$ można pokazać jak wcześniej, że $|\psi(\varphi(a_n)) - \psi(\varphi(a))| \to 0$. $\square$

Lemat 2. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem w $\overline{\mathbb{R}}$. Zbieganie $a_n \to +\infty\,(-\infty)$ w $\overline{\mathbb{R}}$ jest równoważne temu, że

$$\forall_{C\in\mathbb{R}}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq N}\ C < a_n (a_n < C).$$

Dowód. Wynika wprost z wypisania wzoru na odległość w $\overline{\mathbb{R}}$ – ciąg zbiega do nieskończoności tylko, gdy przekracza każde możliwe ograniczenie górne. $\square$

Twierdzenie 21. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem w $\overline{\mathbb{R}}$. Taki ciąg ma punkt skupienia.

Dowód. Jeśli nieskończenie wiele wyrazów $\{a_n\}$ ma wartości $\pm\infty$, to któraś z tych wartości jest jego punktem skupienia. Jeśli skończenie wiele wyrazów ma te wartości, to możemy je zamienić na liczbę 1 bez wpływu na punkty skupienia. Mamy teraz ciąg w $\mathbb{R}$. Jeśli jest nieograniczony z góry lub z dołu, to odpowiednia nieskończoność jest jego punktem skupienia. Inaczej jest ograniczony, a więc ma punkt skupienia w $\mathbb{R}$, czyli też w $\overline{\mathbb{R}}$. $\square$

Definicja 36. Dla ciągu $\{a_n\} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ definiujemy jego zbiór granic częściowych jako

$$\Gamma_{\{a_n\}} = \left\{a \in \overline{\mathbb{R}} : a \text{ jest punktem skupienia } \{a_n\} \text{ w } \overline{\mathbb{R}}\right\}.$$

Lemat 3. Dla ciągu $\{a_n\} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ zbiór $\Gamma_{\{a_n\}}$ jest niepusty i domknięty w $\overline{\mathbb{R}}$, a do tego

$$\inf \Gamma_{\{a_n\}}, \sup \Gamma_{\{a_n\}} \in \Gamma_{\{a_n\}}.$$

Dowód. Każdy ciąg w $\overline{\mathbb{R}}$ ma punkt skupienia. Dalej oznaczmy $\Gamma_{\{a_n\}}$ przez S. Jeśli $b \notin S$, to istnieje jego otoczenie U w $\overline{\mathbb{R}}$, w którym leży skończona liczba elementów ciągu. Zatem $U \subseteq S^c$, bo U jest otoczeniem każdego swojego elementu. Zatem S^c jest otwarty, czyli S jest domknięty.

Oznaczmy teraz $a = \sup S$ i przypuśćmy, że $a \notin S$. Mamy $S \neq \emptyset$, a więc $a \neq -\infty$. Do tego $[a, +\infty] \cap S = \emptyset$. Rozważamy przypadki. Jeśli $a = +\infty$, to istnieje takie $R > 0$, że $(R, +\infty] \cap S = \emptyset$ (bo S^c jest otwarty), a z tego wynika, ze $\sup S \leq R$ – sprzeczność. Podobnie, jeśli $a \in \mathbb{R}$, to istnieje takie $r > 0$, że $(a - r, a + r) \cap S = \emptyset$, czyli ponownie $\sup S \leq a - r$. Analogicznie pokazujemy dla infimum. Zauważmy, że to rozumowanie działa dla dowolnego zbioru domkniętego. $\square$

Definicja 37. Granicą górną (dolną) ciągu $\{a_n\}$ w $\overline{\mathbb{R}}$ nazywamy $\sup \Gamma_{\{a_n\}}$ ($\inf \Gamma_{\{a_n\}}$). Oznaczamy ją $\limsup_{n\to\infty} a_n$ ($\liminf_{n\to\infty} a_n$).

Twierdzenie 22. Niech $\{a_n\} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ i $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Zachodzi

1. $\liminf_{a\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$
2. $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = a \iff a_n \to a$.

Dowód. (1) Niech $m = \inf \Gamma_{\{a_n\}}$ i $M = \sup \Gamma_{\{a_n\}}$. Mamy $m \leq M$ z niepustości $\Gamma_{\{a_n\}}$.

(2) Mamy $\Gamma_{\{a_n\}} \subseteq [m, M]$.

($\Longrightarrow$) a jest jedynym punktem skupienia $\{a_n\}$. Gdyby istniał taki ciąg indeksów $n_1 < n_2 < \ldots$, że dla otoczenia $U \ni a$ jest $a_{n_k} \notin U$, to dałoby to ciąg $\{a_{n_k}\}$ o punkcie skupienia nie będącym a – sprzeczność. Zatem w U leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu, czyli $a_n \to a$.

($\Longleftarrow$) Jest $\Gamma_{\{a_n\}} = \{a\}$, a więc $m = M$. $\square$