

ANALIZA MATEMATYCZNA 2

NOTATKI

„To jest jakiś masochizm albo sadyzm, zależnie od tego, do kogo to jest skierowane.”

MACIEJ MIKOŁAJCZAK
Kraków, 2025

Spis treści

1. Przestrzenie Banacha	2
-------------------------	---

1. Przestrzenie Banacha

Twierdzenie 1. W przestrzeni unormowanej $(E, \|\cdot\|)$ następujące odwzorowania są ciągłe:

1. $E \ni x \rightarrow \|x\| \in \mathbb{R}$,
2. $E \times E \ni (x, y) \rightarrow x + y \in E$,
3. $\mathbb{K} \times E \ni (\lambda, x) \rightarrow \lambda \cdot x \in E$.

Dowód. Z odwrotnej nierówności trójkąta $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ dostajemy 1-lipschitzowskość, a więc w szczególności ciągłość normy. Tę nierówność dostajemy przeliczając $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ i analogicznie dla $\|y\|$.

W przestrzeni metrycznej ciągłość można badać ciągowo, a więc bierzemy ciąg $E \times E \ni (x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$. Wtedy rozważamy normę produktową $\|x_n + y_n - x - y\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \rightarrow 0$.

Podobnie bierzemy $\lambda_n \rightarrow \lambda$ i $x_n \rightarrow x$ w odpowiednich normach. Wtedy

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|\lambda_n x_n - \lambda x + \lambda_n x - \lambda_n x\| \leq |\lambda_n| \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \|x\| \rightarrow |\lambda| \cdot 0 + 0 = 0.$$

□

Definicja 1. Przestrzeń unormowana $(E, \|\cdot\|)$ nazywamy przestrzenią Banacha, gdy z metryką indukowaną normą jest ona przestrzenią metryczną zupełną.

Przykład. Przestrzeniami Banacha są np. ciała $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ oraz przestrzenie wektorowe nad nimi z normami $\ell_1, \ell_2, \ell_\infty$.

Definicja 2. Przestrzeń wektorową z iloczynem skalarnym nazywamy przestrzenią unitarną. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ zadaje normę na tej przestrzeni.

Twierdzenie 2. W przestrzeni unitarnej $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ zachodzi

1. nierówność Cauchy'ego-Schwarza $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$,
2. nierówność Minkowskiego $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Dowód. Dla $y = 0$ pierwsza nierówność oczywiście zachodzi. Zatem można wziąć $z = x - \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y$ i policzyć

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle z, z \rangle &= \|x\|^2 - 2\operatorname{Re} \left(\left\langle x, \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y \right\rangle \right) + \left\| \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y \right\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2\operatorname{Re} \left(\frac{\overline{\langle x, y \rangle}}{\|y\|^2} \langle x, y \rangle \right) + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^4} \|y\|^2 = \|x\|^2 - 2 \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \leq \|x\|^2. \end{aligned}$$

Druga nierówność wynika z przeliczenia

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

□

Wniosek. $\sqrt{\langle x, x \rangle}$ faktycznie jest normą.

Twierdzenie 3. Przestrzeń unormowana E pochodzi od iloczynu skalarnego wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi równość równoległoboku

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Dowód. ($\implies$) Mając iloczyn skalarny liczymy

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).\end{aligned}$$

($\impliedby$) W przestrzeni nad $\mathbb{R}$ wystarczy położyć $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$ (i sprawdzić poprawność), nad $\mathbb{C}$ jest trudniej. $\square$

Definicja 3. Przestrzeń unitarną zupełną względem normy zadanej iloczynem skalarnym nazywamy przestrzenią Hilberta.

Definicja 4. Dla niepustego zbioru X i przestrzeni unormowanej E wprowadzamy oznaczenie

$$\mathcal{B}(X, E) = \{f : X \rightarrow E \mid f \text{ jest ograniczona}\}.$$

Ten zbiór jest przestrzenią wektorową z działaniami po wartościach.

Propozycja 1. Funkcja

$$\|\cdot\|_\infty : \mathcal{B}(X, E) \ni f \rightarrow \sup\{\|f(x)\| : x \in X\} \in [0, +\infty)$$

jest normą.

Twierdzenie 4. Niech $f_n \in \mathcal{B}(X, E)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i niech $f : X \rightarrow E$. Wtedy $f_n \rightrightarrows f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in \mathcal{B}(X, E)$ oraz $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$.

Dowód. Było na AM1. $\square$

Twierdzenie 5. Niech $X \neq \emptyset$ i E będzie przestrzenią unormowaną. E jest przestrzenią Banacha wtedy i tylko wtedy, gdy $(\mathcal{B}(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ jest przestrzenią Banacha.

Dowód. ($\implies$) Było na AM1.

($\impliedby$) Funkcje stałe tworzą podprzestrzeń $\mathcal{B}(X, E)$ i są izomorficzne z E . $\square$

Twierdzenie 6. Niech (X, τ) będzie niepustą przestrzenią topologiczną a $(E, \|\cdot\|)$ przestrzenią unormowaną. Wtedy E jest przestrzenią Banacha wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór

$$\mathcal{CB}(X, E) = \{f \in \mathcal{B}(X, E) : f \text{ jest ciągłe}\}$$

jest przestrzenią Banacha.

Dowód. ($\implies$) Było na AM1.

($\impliedby$) Funkcje stałe tworzą podprzestrzeń $\mathcal{CB}(X, E)$ i są izomorficzne z E . $\square$

Notacja. Gdy X jest zwartą topologią każda funkcja ciągła jest ograniczona. Skracamy więc zapis $\mathcal{CB}(X, E)$ do $\mathcal{C}(X, E)$. Jeśli $E = \mathbb{K}$, to pomijamy również przestrzeń.

Definicja 5. Definiujemy przestrzeń ciągów ograniczonych jako

$$\ell^\infty = \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \{(x_n) \in \mathbb{K}^\mathbb{N} : (x_n) \text{ jest ciągiem ograniczonym}\}.$$

Rozważamy też jej podprzestrzeń

$$c = \{(x_n) \in \mathbb{K}^\mathbb{N} : (x_n) \text{ zbieżny}\} \subseteq \ell^\infty,$$

$$c_0 = \{(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x_n \rightarrow 0\} \subseteq c,$$

$$\tilde{c}_0 = \{(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq N} x_n = 0\} \subseteq c_0.$$

Notacja. Dla przestrzeni unormowanej E piszemy $\mathbb{B}_E = \{x \in E : \|x\| < 1\}$. Jest to jednostkowa kula otwarta.

Twierdzenie 7. Niech E, F będą unormowanymi przestrzeniami nad $\mathbb{K}$ a $f : E \rightarrow F$ odwzorowaniem liniowym. Wtedy następujące warunki są równoważne.

1. f jest ciągłe,
2. $\exists_{a \in E} f$ jest ciągłe w a ,
3. f jest ciągłe w 0 ,
4. f jest odwzorowaniem ograniczonym: $\exists_{r > 0} f(\mathbb{B}_E) \subseteq r\mathbb{B}_F$,
5. $\exists_{R, r > 0, x \in E} f(x + R\mathbb{B}_E) \subseteq f(x) + r\mathbb{B}_F$,
6. $\exists_{R, r > 0} \forall_{x \in E} f(x + R\mathbb{B}_E) \subseteq f(x) + r\mathbb{B}_F$,
7. $\exists_{M \geq 0} \forall_{x \in E} \|f(x)\| \leq M\|x\|$,
8. f jest jednostajnie ciągłe.

Dowód. (1 $\implies$ 2) Oczywiste.

(2 $\implies$ 3) Ustalmy $\varepsilon > 0$ i weźmy $\delta > 0$ tak, by $\|x - a\|_E < \delta \implies \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon$. Z liniowości dostajemy dla $y = x - a$: $\varepsilon > \|f(y)\|_F = \|f(y) - f(0)\|_F$.

(3 $\implies$ 4) Weźmy ε i δ takie, że $\|y\| < \delta \implies \|f(y)\| < \varepsilon$. Biorąc $z \in \mathbb{B}_E$ i kładąc $y = \delta z$ dostajemy $\|y\| = \delta\|z\| < \delta$, a więc $\|f(\delta z)\| < \varepsilon$, więc można przyjąć $r = \frac{\varepsilon}{\delta}$.

(4 $\implies$ 5) Bierzemy $R = 1$, $x = 0$ i r z założenia.

(5 $\implies$ 6) Niech założenie zachodzi dla x_0, R_0, r_0 i weźmy $x \in E$. Mamy

$$\begin{aligned} f(x + R_0\mathbb{B}_E) &= f(x - x_0 + x_0 + R_0\mathbb{B}_E) = f(x) - f(x_0) + f(x_0 + R_0\mathbb{B}_E) \\ &\subseteq f(x) - f(x_0) + f(x_0) + r_0\mathbb{B}_F = f(x) + r_0\mathbb{B}_F. \end{aligned}$$

(6 $\implies$ 7) W założeniu bierzemy $x = 0$ i mamy $f(R\mathbb{B}_E) \subseteq r\mathbb{B}_F$. Dla dowolnego $x \neq 0$ mamy więc $\left\|f\left(R\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq r$, czyli $\|f(x)\| \leq \frac{r}{R}\|x\|$, więc wystarczy przyjąć $M = \frac{r}{R}$. Dla $x = 0$ nierówność jest trywialna.

(7 $\implies$ 8) Dla $x, y \in E$ mamy $\|f(x) - f(y)\| = \|f(x - y)\| \leq M\|x - y\|$, a więc f jest M -lipschitzowskie, czyli jednostajnie ciągłe.

(8 $\implies$ 1) Oczywiste. □