

TOPOLOGIA 1

NOTATKI

„Modulo to, że mogę się zupełnie mylić, to działa to jakoś tak.”

MACIEJ MIKOŁAJCZAK
Kraków, 2025

Spis treści

1. Baza topologii	2
2. Topologia produktowa	3
3. Zbieżność w przestrzeniach topologicznych	5

1. Baza topologii

Definicja 1. Bazą topologii nazywamy rodzinę $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ taką, że dla każdego $x \in X$ istnieje $B \in \mathcal{B}$ takie, że $x \in B$ oraz jeśli $x \in B_1 \cap B_2$ dla $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, to istnieje $B_3 \in \mathcal{B}$ takie, że $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Definicja 2. Topologią generowaną przez bazę $\mathcal{B}$ nazywamy rodzinę $\tau(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{P}(X)$ taką, że dla każdego $U \in \mathcal{P}(X)$ mamy $U \in \tau(\mathcal{B})$ dokładnie wtedy, gdy dla każdego $x \in U$ istnieje $B \in \mathcal{B}$ takie, że $x \in B \subseteq U$.

Lemat 1. Rodzina $\tau(\mathcal{B})$ jest topologią.

Dowód. Oczywiście jest $\emptyset \in \tau(\mathcal{B})$, a $X \in \tau(\mathcal{B})$ wynika z tego, że dla każdego $x \in X$ istnieje $B \in \mathcal{B} : x \in B$.

Niech $(U_j)_{j \in J} \subseteq \tau(\mathcal{B})$. Jeśli $x \in \bigcup_{j \in J} U_j$, to mamy $x \in U_{j_0}$ dla pewnego $j_0 \in J$. Zatem istnieje takie $B \in \mathcal{B}$, że $x \in B \subseteq U_{j_0}$, a więc $x \in B \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$. Zatem $\bigcup_{j \in J} U_j \in \tau(\mathcal{B})$.

Niech $U_1, U_2 \in \tau(\mathcal{B})$ i $x \in U_1 \cap U_2$. Wtedy istnieją takie $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, że $x \in B_1 \subseteq U_1$ oraz $x \in B_2 \subseteq U_2$. Z definicji bazy istnieje B_3 takie, że $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq U_1 \cap U_2$, a więc $U_1 \cap U_2 \in \tau(\mathcal{B})$. $\square$

Lemat 2. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą topologii na X . Wtedy dla każdego $U \subseteq X$ warunek $U \in \tau(\mathcal{B})$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ takie, że $\bigcup \mathcal{A} = U$.

Dowód. ($\implies$) Ustalmy $U \in \tau(\mathcal{B})$. Niech $\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{B} : B \subseteq U\}$. Jeśli $x \in U$, to z $U \in \tau(\mathcal{B})$ istnieje $B \in \mathcal{B} : x \in B \subseteq U$, a więc $x \in \bigcup \mathcal{A}$. Zawieranie w drugą stronę wynika z tego, że $\mathcal{A}$ składa się z podzbiorów U .

($\impliedby$) Jeśli $U = \bigcup \mathcal{A}$ dla odpowiedniego $\mathcal{A}$, to każdy $x \in U$ należy do pewnego $B \in \mathcal{A}$, a więc $U \in \tau(\mathcal{B})$. $\square$

Definicja 3. Niech τ_1, τ_2 będą topologiami na X . Mówimy, że τ_2 jest silniejsza od τ_1 , jeśli $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Lemat 3. Niech topologie τ_1, τ_2 na X będą generowane przez bazy $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$. Wtedy τ_2 jest silniejsza od τ_1 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in X$ i każdego $B_1 \in \mathcal{B}_1 : x \in B_1$ istnieje $B_2 \in \mathcal{B}_2$ takie, że $x \in B_2 \subseteq B_1$.

Dowód. ($\implies$) Ustalmy $x \in X$ i $B_1 \in \mathcal{B}_1 : x \in B_1$. Mamy $B_1 \in \tau(\mathcal{B}_1) \subseteq \tau(\mathcal{B}_2)$, a więc musi istnieć $B_2 \in \mathcal{B}_2$ takie, że $x \in B_2 \subseteq B_1$.

($\impliedby$) Niech $U \in \tau_1$. Chcemy pokazać, że U jest generowane przez $\mathcal{B}_2$. Ustalmy $x \in U$ i $B_1 \in \mathcal{B}_1 : x \in B_1 \subseteq U$. Wiemy, że istnieje $B_2 \in \mathcal{B}_2 : x \in B_2 \subseteq B_1$, a z tego wynika $U \in \tau_2$. $\square$

Lemat 4. Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną. Niech $\mathcal{C} \subseteq \tau$ będzie taką rodziną, że dla każdego $U \in \tau$ i $x \in U$ istnieje $V \in \mathcal{C}$ takie, że $x \in V \subseteq U$. Wtedy $\mathcal{C}$ jest bazą topologii i τ jest generowana przez $\mathcal{C}$.

Dowód. Biorąc $U = X$ dostajemy, że dla każdego $x \in X$ istnieje $V \in \mathcal{C} : x \in V$. Rozważmy $x \in X : x \in V_1 \cap V_2$ dla pewnych $V_1, V_2 \in \mathcal{C} \subseteq \tau$. Wiemy, że $V_1 \cap V_2 \in \tau$, a więc istnieje $V \in \mathcal{C} : x \in V \subseteq V_1 \cap V_2$. Zatem $\mathcal{C}$ faktycznie jest bazą.

Mamy $\tau(\mathcal{C}) \subseteq \tau$, bo zbiór po lewej składa się z sum elementów $\mathcal{C}$, a τ jest zamknięta na sumy. Zawieranie w drugą stronę wynika z tego, że dla każdego $U \in \tau$ możemy zapisać $U = \bigcup_{x \in U} V_x$, gdzie $V_x \in \mathcal{C}$ jest zbiorem świadczącym o $x \in V_x \subseteq U$. $\square$

Przykład. Rozważmy przestrzeń metryczną (X, d) . Zbiór kul otwartych

$$\mathcal{K} = \{K(x, r) : x \in X, r \in (0, +\infty)\}$$

jest bazą topologii $\text{top}(d)$.

Dowód. Z definicji $\text{top}(d)$ wiemy, że dla każdego $x \in U \in \text{top}(d)$ istnieje kula otwarta $K : x \in K \subseteq U$. Zatem $\mathcal{K} \subseteq \text{top}(d)$, a te dwa warunki dają nam tezę.

Definicja 4. Podbazą topologii na X nazywamy dowolną rodzinę $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ taką, że $\bigcup \mathcal{S} = X$.

Podbaza $\mathcal{S}$ wyznacza bazę $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ zdefiniowaną w następujący sposób: $U \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$ dokładnie wtedy, gdy mamy $U = A_1 \cap \dots \cap A_k$ dla pewnych $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{S}$. Mówimy, że topologia τ jest generowana przez podbazę $\mathcal{S}$, jeśli jest generowana przez bazę $\mathcal{B}(\mathcal{S})$.

Propozycja 1. Dla podbazy $\mathcal{S}$ baza przez nią generowana faktycznie jest bazą.

Dowód. Z $\bigcup \mathcal{S} = X$ mamy, że dla każdego $x \in X$ istnieje $S \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{S})$ takie, że $x \in S$. Biorąc $x \in B_1 \cap B_2$ dla $B_1 = \bigcap_{i=1}^{k_1} A_i^1 \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$ i $B_2 = \bigcap_{i=1}^{k_2} A_i^2 \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$ widzimy, że $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$. $\square$

Lemat 5. Niech $(X, d_1), (X, d_2)$ będą przestrzeniami metrycznymi. Jeśli istnieją takie stałe $L_1, L_2 \in (0, +\infty)$, że $L_1 d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq L_2 d_2(x, y)$ dla dowolnych $x, y \in X$, to zachodzi $\text{top}(d_1) = \text{top}(d_2)$.

Dowód. Aby pokazać $\text{top}(d_1) \subseteq \text{top}(d_2)$ wystarczy pokazać, że $\mathcal{K}_{d_1} \subseteq \text{top}(d_2)$, bo kule otwarte tworzą bazę topologii zadanej metryką.

Mamy $K_{d_1}(x, r) = \bigcup_{y \in K_{d_1}(x, r)} K_{d_2}(y, r_y)$, gdzie $r_y = \frac{r - d_1(x, y)}{L_2}$. Zawieranie w prawo jest oczywiste, a zawieranie w lewo wynika z tego, że dla $u \in K_{d_2}(y, r_y)$ mamy

$$d_1(u, x) \leq d_1(u, y) + d_1(y, x) \leq L_2 d_2(u, y) + d_1(y, x) < r.$$

W analogiczny sposób dowodzimy drugiego zawierania. $\square$

2. Topologia produktowa

2025-03-17

Definicja 5. Niech $(X, \tau), (Y, \sigma)$ będą przestrzeniami topologicznymi. Topologia produktowa na $X \times Y$, oznaczana $\tau \times \sigma$, to topologia generowana przez bazę

$$\mathcal{B} = \{U \times V \subseteq X \times Y : U \in \tau \wedge V \in \sigma\}.$$

Propozycja 2. Baza z definicji topologii produktowej faktycznie jest bazą.

Dowód. Mamy $X \in \tau, Y \in \sigma$, a więc $(x, y) \in X \times Y \in \mathcal{B}$ dla każdej pary (x, y) .

Ustalmy $(x, y) \in X \times Y$. Jeśli $(x, y) \in U_1 \times V_1 \in \mathcal{B}$ oraz $(x, y) \in U_2 \times V_2 \in \mathcal{B}$, to mamy

$$(x, y) \in (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \in \mathcal{B}.$$

 $\square$

Lemat 6. Niech $(X_1, \sigma_1), (X_2, \sigma_2)$ będą przestrzeniami topologicznymi. Niech $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ będą bazami tych topologii. Wtedy rodzina

$$\mathcal{C} = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathcal{B}_1 \wedge B_2 \in \mathcal{B}_2\}$$

jest bazą topologii produktowej $\sigma_1 \times \sigma_2$.

Dowód. $\mathcal{C}$ jest bazą wprost z tego, że $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ są bazami. Niech $\mathcal{D}$ będzie bazą z definicji topologii produktowej. Mamy $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$, a więc $\tau(\mathcal{C}) \subseteq \tau(\mathcal{D})$.

Rozważmy $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ takie, że $(x_1, x_2) \in B_1 \times B_2 \in \mathcal{D}$. Mamy wtedy $x_1 \in B_1 \in \sigma_1$ oraz $x_2 \in B_2 \in \sigma_2$. Rodziny $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ to bazy odpowiednich topologii, a więc istnieją takie $A_1 \in \mathcal{B}_1, A_2 \in \mathcal{B}_2$, że $x_1 \in A_1 \subseteq B_1$ oraz $x_2 \in A_2 \subseteq B_2$. Mamy $A_1 \times A_2 \in \mathcal{C}$, a to kończy dowód – jest $\tau(\mathcal{D}) \subseteq \tau(\mathcal{C})$. $\square$

Definicja 6. Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną. Dla podzbioru $Y \subseteq X$ rodzina $\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau\}$ jest topologią na Y zwaną topologią indukowaną. Para (Y, τ_Y) jest podprzestrzenią topologiczną (X, τ) .

Lemat 7. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą topologii (X, τ) . Wtedy $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ dla $Y \subseteq X$ jest bazą topologii indukowanej na Y .

Dowód. Oczywiście $\mathcal{B}_Y$ jest bazą. Mamy $\mathcal{B}_Y \subseteq \tau_Y$, z czego od razu wynika $\tau(\mathcal{B}_Y) \subseteq \tau_Y$.

Udowodnimy $\tau_Y \subseteq \tau(\mathcal{B}_Y)$. Weźmy $x \in E \in \tau_Y$. Mamy $U \in \tau : E = U \cap Y$, a więc istnieje takie $B \in \mathcal{B}$, że $x \in B \subseteq U$. Mamy $x \in B \cap Y \subseteq E$, co kończy dowód. $\square$

Propozycja 3. Niech $(X, \tau), (Y, \sigma)$ będą przestrzeniami topologicznymi. Niech $(A, \tau_A), (B, \sigma_B)$ będą ich podprzestrzeniami. Wtedy topologia produktowa na $A \times B$ jest równa topologii indukowanej z topologii $X \times Y$.

Dowód. Bazą topologii produktowej na $A \times B$ jest $\mathcal{B} = \{U \times V : U \in \tau_A \wedge V \in \sigma_B\}$. Bazą topologii produktowej na $X \times Y$ jest $\mathcal{C} = \{E \times F : E \in \tau \wedge F \in \sigma\}$. Zatem bazą topologii na $A \times B$ indukowanej z $X \times Y$ jest

$$\mathcal{C}_{A \times B} = \{(E \times F) \cap (A \times B) : E \times F \in \mathcal{C}\} = \{(E \cap A) \times (F \cap B) : E \in \tau \wedge F \in \sigma\} = \mathcal{B}.$$

$\square$

Pomysł. Będziemy szukać sposobów na wprowadzenie topologii na ogólnym produkcie

$$\prod_{i \in I} X_i = \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \mid \forall i \in I \ f(i) \in X_i \right\}.$$

Definicja 7. Topologią pudełkową τ_b na produkcie przestrzeni topologicznych (X_i, τ_i) nazywamy topologię generowaną przez bazę

$$\mathcal{B}_b = \left\{ \prod_{i \in I} U_i \subseteq \prod_{i \in I} X_i \mid \forall i \in I \ U_i \in \tau_i \right\}.$$

Definicja 8. Definiujemy rzuty na współrzędne $P_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ jako $P_j(f) = f(j)$. Niech

$$\mathcal{S}_j = \left\{ P_j^{-1}(U_j) \subseteq \prod_{i \in I} X_i \mid U_j \in \tau_j \right\} = \left\{ \prod_{i \in I} U_i \subseteq \prod_{i \in I} X_i \mid U_j \in \tau_j \wedge \forall i \in I \setminus \{j\} \ U_i = X_i \right\}.$$

Wtedy $\mathcal{S} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{S}_i$ jest podbazą topologii τ_p , którą nazywamy topologią produktową.

Lemat 8. Niech $d_i : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ będzie metryką. Wtedy $\bar{d}_i = \min(d_i, 1)$ jest metryką równoważną z d_i , to znaczy $\text{top}(\bar{d}_i) = \text{top}(d_i)$.

Dowód. Pokazanie, że $\bar{d}_i$ jest metryką jest proste. Pokażemy równoważność. Ustalmy $x \in K_{d_i}(y, r)$. Mamy wtedy $x \in K_{\bar{d}_i}(x, \min(r - d_i(x, y), 1)) \subseteq K_{d_i}(y, r)$, bo kula po lewej stronie pokrywa się z odpowiednią kulą w nad d_i . Podobnie weźmy $x \in K_{\bar{d}_i}(y, r)$. Jeśli $r > 1$, to ta kula obejmuje całą przestrzeń i mamy $x \in K_{d_i}(x, 1) \subseteq X$. Dla $r \leq 1$ mamy $K_{\bar{d}_i}(y, r) = K_{d_i}(y, r)$. Zatem topologie indukowane przez te metryki są od siebie na wzajem silniejsze, czyli są równe. $\square$

Twierdzenie 1. Niech $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ będzie rodziną przestrzeni topologicznych metryzowalnych. Jeśli I jest co najwyżej przeliczalny, to $\prod_{i \in I} X_i$ z topologią produktową jest przestrzenią topologiczną metryzowalną.

Dowód. Bez straty ogólności zakładamy $I \subseteq \mathbb{N}_+$. Niech d_i będzie metryką świadczącą o metryzowalności τ_i . Zakładamy, że jest $\sup_{(x, y) \in X_i \times X_i} d_i(x, y) \leq 1$, bo zawsze można wziąć metrykę $\min(d_i, 1)$. Definiujemy metrykę na produkcie wzorem

$$\rho(f, g) = \sup_{i \in I} \frac{d_i(f(i), g(i))}{i}.$$

Pokażemy, że $\text{top}(\rho)$ jest równa topologii produktowej. Niech $\mathcal{B}$ będzie jej bazą. Ustalmy $B \in \mathcal{B}$ oraz $f \in B$. Wtedy $B = \prod_{i \in I} U_i$, gdzie $U_i \in \tau_i$ oraz tylko skończenie wiele z tych zbiorów (powiedzmy, że to te o indeksach w pewnym F) nie jest całą przestrzenią. Mamy $K_{d_i}(f(i), r_i) \subseteq U_i$ dla każdego i . Definiujemy $r = \frac{\min\{r_i : i \in F\}}{\max F}$. Pokażemy, że $K_\rho(f, r) \subseteq B$. Weźmy $g \in K_\rho(f, r)$. Mamy

$$\forall_{i \in F} d_i(f(i), g(i)) \leq r i \leq r \max F \leq r_i.$$

Zatem $\forall_{i \in F} g(i) \in B_{d_i}(f(i), r) \subseteq U_i$. Do tego $\forall_{i \in I \setminus F} g(i) \in X_i = U_i$. Zatem $g \in \prod_{i \in I} U_i = B$.

Teraz ustalmy $f \in \prod_{i \in I} X_i$ oraz kulę $K_\rho(f, r)$. Niech $\tilde{r} < r$. Definiujemy

$$U_i = \left\{ x \in X_i : \frac{d_i(f(i), x)}{i} < \tilde{r} \right\}.$$

Mamy $U_i \in \tau_i$ oraz dla $i > \frac{1}{\tilde{r}}$ mamy $U_i = X_i$, bo wtedy $d_i(f(i), x) \leq 1 < i\tilde{r}$. Zatem $B = \prod_{i \in I} U_i \in \mathcal{B}$. Do tego dla $g \in B$ jest $\rho(f, g) = \sup_{i \in I} \frac{d_i(g(i), f(i))}{i} \leq \tilde{r} < r$, a więc $g \in K_\rho(f, r)$. Czyli mamy $f \in B \subseteq K_\rho(f, r)$. $\square$

3. Zbieżność w przestrzeniach topologicznych

2025-03-23

Definicja 9. Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną. Zbiór $A \subseteq X$ nazywamy domkniętym w X , jeśli $X \setminus A \in \tau$.

Propozycja 4. Niech (Y, τ_Y) będzie podprzestrzenią topologiczną przestrzeni (X, τ) . Wtedy $A \subseteq Y$ jest domknięty w Y wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór B domknięty w X taki, że $A = B \cap Y$.

Dowód. ($\implies$) Niech $A \subseteq Y$ będzie domknięty w Y . Wtedy $Y \setminus A \in \tau_Y$, a więc istnieje $U \in \tau$ takie, że $Y \setminus A = U \cap Y$. Zatem $A = Y \setminus (U \cap Y) = Y \setminus U = Y \cap (X \setminus U)$.

($\impliedby$) Niech $A = B \cap Y$ dla pewnego domkniętego B . Wtedy $Y \setminus A = Y \setminus B = Y \cap (X \setminus B)$, co jest otwarte w Y . $\square$