

ALGEBRA LINIOWA Z GEOMETRIĄ 3

NOTATKI

„To jest moja autorska najgłupsza definicja.”

MACIEJ MIKOŁAJCZAK
Kraków, 2025/2026

Spis treści

1. Iloczyn skalarny	2
2. Formy dwuliniowe	3
3. Klasyfikacja form dwuliniowych	5
4. Twierdzenia Witta	9
5. Teoria kategorii	10
6. Produkt tensorowy	12
7. Formy wieloliniowe	15
8. Algebry tensorowe	18
9. Geometria	20

1. Iloczyn skalarny

Uwaga. Rozważamy skończenie wymiarową przestrzeń wektorową V nad ciałem $\mathbb{K}$, gdzie $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Definicja 1. Krotkę $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K})$ nazywamy przestrzenią unitarną, a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nazywamy iloczynem skalarnym, gdy spełnione są następujące warunki:

- liniowość $\langle \alpha v_1 + \beta v_2, w \rangle = \alpha \langle v_1, w \rangle + \beta \langle v_2, w \rangle$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, v_1, v_2, w \in V$.
- symetria sprzężona $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$, gdzie $v, w \in V$.
- dodatnia określoność $\langle v, v \rangle \geq 0$ i $\langle v, v \rangle = 0 \implies v = 0$, gdzie $v \in V$.

Definicja 2. $v, w \in V$ są prostopadłe (ortogonalne), gdy $\langle v, w \rangle = 0$.

Definicja 3. Dla $S \leq V$ definiujemy dopełnienie ortogonalne $S^\perp = \{v \in V : \forall s \in S \langle v, s \rangle = 0\}$.

Definicja 4. Mówimy, że V jest ortogonalną sumą prostą A, B (nasze oznaczenie $V = A \boxplus B$), gdy $V = A \oplus B$ i $\langle a, b \rangle = 0$ dla każdego $a \in A, b \in B$.

Definicja 5. Zbiór wektorów $\{v_1, \dots, v_k\}$ nazywamy ortogonalnym, gdy $\langle v_i, v_j \rangle = a_{ij} \delta_{ij}$ (delta Kroneckera). Zbiór ortogonalny jest ortonormalny, gdy $a_{ij} = 1$ dla każdego i, j .

Propozycja 1. Zbiór ortogonalny jest liniowo niezależny.

Dowód. Jeśli $\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = 0$, to $0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle$, więc $\alpha_j = 0$. $\square$

Propozycja 2 (Procedura Grama-Schmidta). Każda (skończenie wymiarowa) przestrzeń ma bazę ortogonalną.

Twierdzenie 1.

$$V = S \boxplus S^\perp.$$

Dowód. $S \cap S^\perp = \{0\}$, bo $v \in S \cap S^\perp \implies \langle v, v \rangle = 0 \implies v = 0$, ortogonalność S i $S^\perp$ z definicji. Mamy $S + S^\perp = V$, bo możemy zrobić rzut prostopadły na S i mamy wzór

$$w = \left(w - \sum_{i=1}^n \frac{\langle w, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\langle w, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i.$$

To korzysta z wyboru bazy i skończonego wymiaru. $\square$

Uwaga. Dla ustalonego $v \in V$ odwzorowanie $V \ni w \rightarrow \varphi_v(w) = \langle w, v \rangle \in \mathbb{K}$ jest odwzorowaniem liniowym.

Twierdzenie 2 (Riesza o reprezentacji). Odwzorowanie $V \ni v \rightarrow \varphi_v \in V^*$ jest surjekcją.

Dowód. Dla funkcjonału $\varphi \in V^*$ chcemy znaleźć $v \in V$ takie, że $\varphi(w) = \langle w, v \rangle$. Dla zerowego funkcjonału można wziąć wektor zerowy. Dla niezerowego $\dim \ker \varphi = n - 1$, więc $V = \langle w \rangle \boxplus \ker \varphi$ dla pewnego $w \in V$. Ustalamy $v = \frac{\overline{\varphi(w)}}{\langle w, w \rangle} w$ i działa, bo zeruje się na jądrze i ma odpowiednią wartość na w . $\square$

Wniosek. Dla $L \in \text{Lin}(V, V)$ istnieje takie $L^* \in \text{Lin}(V, V)$, że $\langle Lv, w \rangle = \langle v, L^*w \rangle$.

Dowód. Mamy $\varphi_w(v) = \langle Lv, w \rangle$. Z twierdzenia Riesza jest $\varphi_w(v) = \langle v, v_{\varphi_w} \rangle$. Możemy ustalić $L^* : V \ni w \rightarrow v_{\varphi_w} \in V$. Z liniowości iloczynu skalarnego wynika liniowość takiego przekształcenia. $\square$

Definicja 6. $A \in \text{Lin}(V, V)$ jest operatorem:

1. normalnym, gdy $AA^* = A^*A$.

2. hermitowskim, gdy $A = A^*$.
3. unitarnym, gdy $AA^* = A^*A = \text{id}$.

Operatory unitarne lub hermitowskie są normalne.

Uwaga. Odwzorowania unitarne są izometriami, bo $\langle Av, Aw \rangle = \langle v, A^*Aw \rangle = \langle v, w \rangle$.

Twierdzenie 3 (Spektralne). $A \in \text{Lin}(V, V)$ jest operatorem normalnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza ortonormalna $e_1, \dots, e_n$ taka, że $Ae_i = \lambda_i e_i$, gdzie $\lambda_i \in \mathbb{C}$.

Przy założeniu normalności A jest hermitowski wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_i \in \mathbb{R}$, a unitarny wtedy i tylko wtedy, gdy $|\lambda_i| = 1$.

2. Formy dwuliniowe

2025-10-10

Uwaga. Dalej będziemy rozważać przestrzenie wektorowe nad dowolnym ciałem $\mathbb{K}$.

Definicja 7. Forma dwuliniowa to funkcja $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ taka, że dla ustalonego $v \in V$ funkcje $\langle \cdot, v \rangle$ i $\langle v, \cdot \rangle$ są liniowe.

Propozycja 3. Dla każdej formy dwuliniowej na n -wymiarowej przestrzeni wektorowej i ustalonej bazy B istnieje dokładnie jedna macierz $M_B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ taka, że $\langle v, w \rangle = v_B^T M_B w_B$. Podobnie dowolna macierz $M \in \mathbb{K}^{n \times n}$ zadaje formę dwuliniową $\langle v, w \rangle_M = v_B^T M w_B$.

Dowód. Niech $B = \{e_1, \dots, e_n\}$. Mamy $e_i^T M_B e_j = (M_B)_{ij}$, więc musi być $M_B = [\langle e_i, e_j \rangle]_{ij}$. Dla $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ i $w = \sum_{i=1}^n w_i e_i$ mamy

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i w_j \langle e_i, e_j \rangle = v^T M_B w.$$

□

Uwaga. W przypadku skończenia wymiarowym dla zadanej bazy B możemy utożsamić formę dwuliniową z odpowiadającą jej macierzą M_B .

Propozycja 4. Niech M_{B_1} i M_{B_2} będą macierzami pewnej formy dwuliniowej odpowiednio w bazach B_1 i B_2 . Zachodzi $M_{B_1} = Q^T M_{B_2} Q$, gdzie Q jest odpowiednią macierzą przejścia.

Dowód. $v_{B_2}^T M_{B_2} w_{B_2} = (Q v_{B_1})^T M_{B_2} Q w_{B_1} = v_{B_1}^T Q^T M_{B_2} Q w_{B_1}$. □

Definicja 8. Macierze A i B nazywamy kongruentnymi, jeśli istnieje taka odwracalna macierz Q , że $A = Q^T B Q$. Piszemy wtedy $A \equiv B$.

Definicja 9. Wyróżnik (dyskryminant) formy dwuliniowej $\langle \cdot, \cdot \rangle$ to wartość

$$\text{desc} \langle \cdot, \cdot \rangle = [\det M_B] \in \mathbb{K}^{\times 2}$$

będąca klasą równoważności wyznacznika macierzy z dokładnością do mnożenia przez kwadrat elementu ciała.

Dla różnych baz B_1, B_2 mamy $\det M_{B_1} = \det Q^T \det M_{B_2} \det Q = \det(Q)^2 \det M_{B_2}$, zatem wyróżnik jest dobrze określony.

Definicja 10. Funkcję $\tau : V \rightarrow W$ między przestrzeniami z zadanymi formami dwuliniowymi nazywamy izometrią, jeśli jest bijekcją i $\langle \tau v_1, \tau v_2 \rangle_W = \langle v_1, v_2 \rangle_V$. Przestrzenie nazywamy izometrycznymi, jeśli istnieje między nimi izometria.

Definicja 11. Dla zadanej formy dwuliniowej i elementów $x, y \in V$ mówimy, że x jest prostopadłe do y ($x \perp y$), jeśli $\langle x, y \rangle = 0$.

Uwaga. Powyższa relacja nie jest symetryczna, w przeciwieństwie do ortogonalności nad iloczynem skalarnym.

Definicja 12. Niech $x \in V \setminus \{0\}$. Wektor x jest izotropowy, jeśli $\langle x, x \rangle = 0$ (czyli $x \perp x$).

Definicja 13. Niech $S \leq V$. Definiujemy przestrzeń ortogonalną

$$S^\perp = \{v \in V : \forall_{s \in S} \langle s, v \rangle = 0\}.$$

Definicja 14. Radykałem przestrzeni V nazywamy przestrzeń $\text{rad}(V) = V^\perp$. Radykałem podprzestrzeni $S \leq V$ nazywamy jej podprzestrzeń $\text{rad}(S) = S^\perp \cap S$.

Uwaga. Forma dwuliniowa nie musi być symetryczna, można więc rozróżniać prawe i lewe przestrzenie ortogonalne oraz radykały:

$$\begin{aligned} S^\perp &= \{v \in V : \forall_{s \in S} \langle s, v \rangle = 0\}, \quad \text{rad}^\perp(S) = S^\perp \cap S \\ {}^\perp S &= \{v \in V : \forall_{s \in S} \langle v, s \rangle = 0\}, \quad {}^\perp \text{rad}(S) = {}^\perp S \cap S. \end{aligned}$$

W naszej definicji skupiamy się na tych prawych.

Definicja 15. Przestrzeń V z formą dwuliniową nazywamy nieosobliwą, jeśli $\text{rad}(V) = \{0\}$. Przestrzeń nazywamy osobliwą lub zdegenerowaną, jeśli nie jest nieosobliwa. Przestrzeń jest całkowicie zdegenerowana, jeśli $\text{rad}(V) = V$. Te same określenia stosujemy również do formy dwuliniowej, którą rozważamy.

Propozycja 5. 1. Przestrzeń jest całkowicie zdegenerowana wtedy i tylko wtedy, gdy $M_B = 0$.
2. Przestrzeń jest zdegenerowana wtedy i tylko wtedy, gdy $\det M_B = 0$.

Dowód. Dla zerowej formy dwuliniowej $M_B = 0$ przestrzeń jest całkowicie zdegenerowana, natomiast jeśli $(M_B)_{ij} = \lambda \neq 0$, to $e_i^T M_B e_j = \lambda$ i $e_j \notin \text{rad}(V)$.

Jeśli mamy $\det M_B = 0$, to istnieje $x \in V \setminus \{0\}$ taki, że $M_B x = 0$. Zatem $y^T M_B x = 0$ i $x \in \text{rad}(V)$. W drugą stronę $y^T M_B x = 0$ dla każdego y implikuje $M_B x = 0$, czyli $\det M_B = 0$. $\square$

Definicja 16. Mówimy, że V jest ortogonalną sumą prostą podprzestrzeni A i B ($V = A \boxplus B$), jeśli $V = A \oplus B$ oraz $\forall_{a \in A, b \in B} a \perp b, b \perp a$.

Twierdzenie 4. Niech $W = {}^\perp \text{rad}(V) \cap \text{rad}^\perp(V)$. Istnieje taka przestrzeń $S \leq V$, że $V = W \boxplus S$ oraz ${}^\perp \text{rad}(S) \cap \text{rad}^\perp(S) = \{0\}$.

Dowód. Dopełniając bazę W do bazy V dostajemy przestrzeń S taką, że $V = W \oplus S$. Dla wszystkich wektorów $s \in S, w \in W$ mamy $\langle s, w \rangle = \langle w, s \rangle = 0$, więc $V = W \boxplus S$.

Ustalmy $s \in {}^\perp \text{rad}(S) \cap \text{rad}^\perp(S)$. Dla dowolnego $v \in V$ jest $v = w + s'$ dla pewnych $w \in W, s' \in S$, więc $\langle v, s \rangle = \langle w, s \rangle + \langle s', s \rangle = 0$ i analogicznie $\langle s, v \rangle = 0$. Zatem $s \in W$, czyli $s = 0$. To kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 5 (Riesz). Niech V będzie nieosobliwą przestrzenią z formą dwuliniową. Odwzorowanie $V \ni v \rightarrow \langle \cdot, v \rangle \in V^*$ jest iniekcją, a więc izomorfizmem dla skończone wymiarowych przestrzeni.

Dowód. Jeśli mamy $\langle \cdot, v \rangle \equiv 0$ dla pewnego v , to $\forall_{w \in V} \langle w, v \rangle = 0$, czyli $v \in \text{rad}(V)$, więc $v = 0$ z nieosobliwości. Zatem jądro odwzorowania jest trywialne. $\square$

Wniosek. Jeśli $S \leq V$ i S lub V jest nieosobliwa, to $\forall_{f \in S^*} \exists_{v \in V} f(s) = \langle s, v \rangle$ dla każdego $s \in S$.

Dowód. Dla nieosobliwego S teza wynika z twierdzenia Riesz. Dla nieosobliwego V możemy rozszerzyć dowolne $f \in S^*$ do funkcjonału na V (definiując wartości na elementach bazy V), skorzystać z twierdzenia Riesz i zacieśnić odwzorowanie do S . $\square$

Uwaga. Dalej zakładamy, że relacja $\perp$ jest symetryczna.

Propozycja 6. Niech V będzie nieosobliwą przestrzenią wektorową, $S \leq V$, $\dim V < \infty$ i założmy, że relacja $\perp$ jest symetryczna. Zachodzi:

1. $\dim S + \dim S^\perp = \dim V$.
2. $(S^\perp)^\perp = S$.
3. $\text{rad}(S) = \text{rad}(S^\perp)$.
4. S jest nieosobliwa $\iff S^\perp$ jest nieosobliwa.

Dowód. 1. Z twierdzenia Riesz $\varphi : V \ni v \rightarrow \langle \cdot, v \rangle \in S^*$ jest surjekcją. Równość $\dim \text{im } \varphi + \dim \ker \varphi = \dim V$ daje nam tezę.

2. Mamy $\dim S + \dim S^\perp = \dim V = \dim S^\perp + \dim (S^\perp)^\perp$, ale $S \subseteq (S^\perp)^\perp$, więc z równości ich (skończonych) wymiarów mamy $S = (S^\perp)^\perp$.

3. $\text{rad}(S) = S \cap S^\perp = (S^\perp)^\perp \cap S^\perp = \text{rad}(S^\perp)$.

4. Natychmiast wynika z poprzedniego. $\square$

Twierdzenie 6. Niech V będzie przestrzenią wektorową, $S \leq V$, $\dim V < \infty$ i założmy, że relacja $\perp$ jest symetryczna. Następujące warunki są równoważne:

1. $V = S \boxtimes S^\perp$
2. $V = S \oplus S^\perp$.
3. $S \cap S^\perp = \{0\}$.
4. S jest nieosobliwa.

Dowód. Definicje sumy ortogonalnej i przestrzeni ortogonalnej natychmiast dają nam $(1 \iff 2)$ oraz $(1 \implies 3)$. Równoważność $(3 \iff 4)$ wynika z definicji nieosobliwości.

$(3 \implies 2)$ Dla odwzorowania $\varphi : V \ni v \rightarrow \langle \cdot, v \rangle \in S^*$ mamy

$$\dim V = \dim \ker \varphi + \dim \text{im } \varphi = \dim S^\perp + \dim \text{im } \varphi \leq \dim S^\perp + \dim S.$$

Z drugiej strony mamy

$$\dim V \geq \dim (S + S^\perp) = \dim S + \dim S^\perp - \dim (S \cap S^\perp) = \dim S + \dim S^\perp.$$

Zatem $\dim V = \dim S + \dim S^\perp = \dim (S + S^\perp)$, więc ze skończoności wymiaru $V = S + S^\perp$. $\square$

3. Klasyfikacja form dwuliniowych

2025-10-17

Definicja 17. Formę dwuliniową $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nazywamy

- symetryczną, jeśli $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
- antysymetryczną, jeśli $\langle x, y \rangle = -\langle y, x \rangle$.
- alternującą, jeśli $\langle x, x \rangle = 0$.

Uwaga. Forma dwuliniowa jest (anty)symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy jej macierz również jest (anty)symetryczna. Forma dwuliniowa jest alternująca wtedy i tylko wtedy, gdy jej macierz jest

antysymetryczna i ma zera na przekątnej.

Propozycja 7. Jeśli $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$, to forma dwuliniowa jest alternująca wtedy i tylko wtedy, gdy jest antysymetryczna. Jeśli $\text{char } \mathbb{K} = 2$, to jeśli forma jest alternująca, to jest antysymetryczna. Dodatkowo antysymetryczność jest równoważna symetryczności.

Dowód. ($\Rightarrow$) Mamy $0 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$, więc $\langle x, y \rangle = -\langle y, x \rangle$. Działa to przy charakterystyce 2, w której dodatkowo mamy $-1 = 1$, więc $-\langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle$.

($\Leftarrow$) Mamy $\langle x, x \rangle = -\langle x, x \rangle$, czyli $2\langle x, x \rangle = 0$, a więc $\langle x, x \rangle = 0$, o ile $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$. $\square$

Twierdzenie 7. Dla $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ każda forma dwuliniowa jest sumą formy symetrycznej i alternującej (antysymetrycznej).

Dowód. Dla zadanej formy $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiujemy $\langle x, y \rangle_s = \frac{\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle}{2}$ oraz $\langle x, y \rangle_a = \frac{\langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle}{2}$. Te formy spełniają odpowiednie własności i sumują się do zadanej formy. $\square$

Uwaga. Powyższe twierdzenie można wypowiedzieć w następujący sposób: przestrzeń form dwuliniowych jest sumą algebraiczną (a nawet prostą) przestrzeni form symetrycznych i antysymetrycznych.

Twierdzenie 8. Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie formą dwuliniową na przestrzeni V . Relacja prostopadłości $\perp$ związana z $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy forma jest symetryczna lub alternująca.

Dowód. ($\Rightarrow$) Oznaczmy $Z(V) = \{v \in V : \forall w \in V \langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle\}$. Łatwo sprawdzić, że jest to podprzestrzeń V . Jeśli mamy $\langle x_0, x_0 \rangle \neq 0$ dla pewnego x_0 , to dla dowolnego $v \in V$ możemy zdefiniować $w = \langle x_0, v \rangle x_0 - \langle x_0, x_0 \rangle v$ i policzyć

$$\langle x_0, w \rangle = \langle x_0, v \rangle \langle x_0, x_0 \rangle - \langle x_0, x_0 \rangle \langle x_0, v \rangle = 0.$$

Zatem $x_0 \perp w$, czyli $0 = \langle w, x_0 \rangle = \langle x_0, v \rangle \langle x_0, x_0 \rangle - \langle x_0, x_0 \rangle \langle v, x_0 \rangle$, więc $\langle v, x_0 \rangle = \langle x_0, v \rangle$. Z tego wynika $x_0 \in Z(V)$. Załóżmy, że forma nie jest alternująca i ustalmy x_0 spełniające $\langle x_0, x_0 \rangle \neq 0$. Dla dowolnego $v \in V$ znajdziemy takie $\alpha \in \mathbb{K}^*$, że $x_0 + \alpha v \in Z(V)$. Wtedy dostaniemy $v \in Z(V)$, bo $Z(V)$ jest przestrzenią wektorową. Możemy założyć, że $\langle v, v \rangle = 0$ (bo inaczej $v \in Z(V)$) i przeliczyć

$$\langle x_0 + \alpha v, x_0 + \alpha v \rangle = \langle x_0, x_0 \rangle + \alpha \langle x_0, v \rangle + \alpha \langle v, x_0 \rangle + \alpha^2 \langle v, v \rangle = \langle x_0, x_0 \rangle + 2\alpha \langle x_0, v \rangle.$$

Dla $\text{char } \mathbb{K} = 2$ lub $\langle x_0, v \rangle = 0$ ta wartość wynosi $\langle x_0, x_0 \rangle \neq 0$. Inaczej można ustalić $\alpha = 2^{-1} \langle x_0, v \rangle^{-1} \langle x_0, x_0 \rangle$ – wtedy wynosi ona $2\langle x_0, x_0 \rangle \neq 0$. W obu przypadkach mamy tezę, a więc $Z(V) = V$ i forma jest symetryczna.

($\Leftarrow$) Symetryczna forma oczywiście zadaje symetryczną prostopadłość. Alternująca forma jest antysymetryczna, a więc $\langle x, y \rangle = 0$ implikuje $\langle y, x \rangle = -0 = 0$. $\square$

Propozycja 8. 1. Baza ortogonalna istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $V = \bigoplus_{i=1}^{\dim V} \langle v_i \rangle$ dla pewnych wektorów v_i .

2. Forma alternująca ma bazę ortogonalną wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle \cdot, \cdot \rangle \equiv 0$.

3. Dla $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ każda forma alternująca i symetryczna jest stale równa 0.

Definicja 18. Płaszczyznę hiperboliczną nazywamy dowolną przestrzeń $\text{span}\{e_1, e_2\}$, gdzie e_1, e_2 są takimi wektorami, że $\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = 0$ oraz $\langle e_1, e_2 \rangle = 1$. Parę wektorów rozpinających płaszczyznę hiperboliczną nazywamy parą hiperboliczną. Przy ustalonej wartości $\langle e_2, e_1 \rangle$ (na przykład przy założeniu symetryczności lub alternującości) widzimy, że każde dwie płaszczyzny hiperboliczne są izometryczne.

Definicja 19. Nieosobliwa przestrzeń wektorowa z alternującą formą dwuliniową jest nazywana przestrzenią symplektyczną.

Twierdzenie 9. Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie nieosobliwą przestrzenią z alternującą formą dwuliniową. Wtedy $V = \boxtimes_{i=1}^k \mathcal{H}_i$, gdzie $\mathcal{H}_i$ jest pewną alternującą płaszczyzną hiperboliczną. W szczególności $\dim V = 2k$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy indukcją po wymiarze V . Dla $\dim V = 1$ forma alternująca musi być zerowa, więc V nie jest nieosobliwa, dla $\dim V = 2$ ustalmy $0 \neq v_1 \in V$, wtedy z twierdzenia Riesz istnieje $v_2 \in V$ takie, że $\langle v_1, v_2 \rangle = 1$. Te wektory są liniowo niezależne, bo inaczej $\langle v_1, v_2 \rangle = \alpha \langle v_1, v_1 \rangle = 0$. Zatem $V = \text{span} \{v_1, v_2\}$ jest płaszczyzną hiperboliczną, co kończy dowód bazy indukcyjnej.

Dla $\dim V > 2$ ustalmy (podobnie jak przedtem) wektory $v_1, v_2 \in V$ tworzące parę hiperboliczną. Podprzestrzeń $H_1 = \text{span} \{v_1, v_2\}$ jest nieosobliwa ($\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 \rangle = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$, jeśli to ma się zerować dla każdych α_1, α_2 , to $\beta_1 = \beta_2 = 0$), więc $V = H_1 \boxtimes H_1^\perp$ i $H_1^\perp$ jest nieosobliwa, czyli można skorzystać z założenia indukcyjnego i zakończyć dowód. $\square$

Wniosek. Jeśli M jest macierzą alternującą, to istnieje odwracalna macierz Q taka, że

$$M = Q^T \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & -1 & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} Q,$$

czyli najpierw mamy na przekątnej bloki $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, a potem zera.

Uwaga. Dowolna forma alternująca jest z dokładnością do izometrii określona przez dwie liczby: $r = \dim \text{rad}(V)$ i $s = \dim S$, gdzie $V = \text{rad}(V) \boxtimes S$ i S jest nieosobliwa.

Lemat 1. Załóżmy, że $\text{char } \mathbb{K} = 2$ i niech $V = \langle e_1, u_1, u_2 \rangle$ ma formę dwuliniową zadaną macierzą

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie $a \neq 0$ (czyli V jest sumą płaszczyzny hiperbolicznej i przestrzeni rozpinanej przez wektor o niezerowej normie). Wtedy $V = \boxtimes_{i=1}^3 \langle v_i \rangle$ dla pewnych wektorów v_1, v_2, v_3 .

Dowód. Ustalmy

$$v_1 = e_1 + u_1 + u_2, \quad v_2 = e_1 + au_1, \quad v_3 = e_1 + (1+a)u_1 + u_2.$$

Mamy $\langle v_1, v_2 \rangle = a + a = 2a = 0$, $\langle v_1, v_3 \rangle = a + 1 + 1 + a = 0$, $\langle v_2, v_3 \rangle = a + a = 0$. Zatem te wektory ortogonalnie rozpinają całą przestrzeń. $\square$

Twierdzenie 10. Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią z niealternującą, symetryczną formą dwuliniową. Wtedy istnieje baza ortogonalna V , czyli $V = \boxtimes_{i=1}^{\dim V} \langle v_i \rangle$.

Dowód. Dla przestrzeni jednowymiarowej teza jest oczywista. Dalej zakładamy $\dim V \geq 2$. Istnieje $v \in V$ takie, że $\langle v, v \rangle \neq 0$. Możemy zapisać $V = \langle v \rangle \boxtimes (\langle v \rangle)^\perp = \langle v \rangle \boxtimes V'$, gdzie $\dim V' = \dim V - 1$. Jeśli V' jest niealternująca, to możemy skorzystać z indukcji.

Dalej założymy, że V' jest alternująca. Jeśli $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$, to $\langle \cdot, \cdot \rangle$ na V' jest alternująca, czyli antysymetryczna, a do tego symetryczna, więc $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{V'} \equiv 0$. Zatem V' jest całkowicie zdegenerowana i dowolna baza V' jest bazą ortogonalną.

Dla $\text{char } \mathbb{K} = 2$ możemy zapisać $V' = \boxtimes_{i=1}^k \mathcal{H}_i \boxtimes \text{rad}(V')$. Stosując powyższy lemat do każdej z przestrzeni $\langle v \rangle + \mathcal{H}_i$ dostajemy bazę ortogonalną całej przestrzeni. $\square$

Wniosek. Jeśli M jest macierzą symetryczną i $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$, to istnieje taka odwracalna macierz Q , że $M = Q^T \text{diag}(x_1, \dots, x_n) Q$ dla pewnych $x_1, \dots, x_n$. Ta sama teza zachodzi, jeśli $\text{char } \mathbb{K} = 2$ i przekątna nie jest zerowa.

Propozycja 9. Niech F będzie niealternującą, symetryczną, nieosobliwą formą dwuliniową o macierzy M nad ciałem $\mathbb{K}$. Jeśli $\mathbb{K}$ jest algebraicznie domknięte, to $M \equiv I$ (forma jest identycznością w pewnej bazie).

Dowód. Wiemy, że $M \equiv \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$. Możemy przeskalować wektory z bazy: $e_i \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_i}} e_i$ (pierwiastki istnieją z domkniętości algebraicznej), dostając $M \equiv I$ (domnażamy z prawej i lewej przez diagonalną macierz przejścia). $\square$

Propozycja 10. Niech F będzie niealternującą, symetryczną, nieosobliwą formą dwuliniową o macierzy M nad ciałem $\mathbb{K}$. Jeśli $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, to $M \equiv \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times m} \\ 0_{m \times n} & -I_m \end{bmatrix}$.

Dowód. Wiemy, że $M \equiv \text{diag}(x_1, \dots, x_{n+m})$. Możemy przeskalować wektory z bazy: $e_i \rightarrow \frac{1}{\sqrt{|x_i|}} e_i$, dostając $M \equiv \text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$. Teraz wystarczy przepermutować wektory bazowe. $\square$

Propozycja 11. Niech F będzie niealternującą, symetryczną, nieosobliwą formą dwuliniową o macierzy M nad ciałem $\mathbb{K}$. Jeśli $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{2^k}$, to $M \equiv I$.

Dowód. Dla każdego $a \in \mathbb{F}_{2^k}$ mamy $(a^{2^{k-1}})^2 = a$, więc każdy element jest kwadratem i można postąpić jak w przypadku ciała algebraicznie domkniętego. $\square$

Lemat 2. Niech q będzie potęgą liczby pierwszej większej od 2.

- Kwadratów w ciele $\mathbb{F}_q$ jest dokładnie $\frac{q+1}{2}$.
- Niech $d \in \mathbb{F}_q$ nie będzie kwadratem. Dla każdego $x \in \mathbb{F}_q$ albo $x = y^2$, albo $x = dy^2$ dla pewnego y .
- Dla każdego $x \in \mathbb{F}_q$ istnieją takie $y, z \in \mathbb{F}_q$, że $x = y^2 + z^2$.

Dowód. • $\varphi : \mathbb{F}_q^* \ni x \rightarrow x^2 \in \mathbb{F}_q^*$ jest homomorfizmem, $\ker \varphi = \{1, -1\}$, wszystkich niezerowych kwadratów jest $|\text{Im } \varphi| = \frac{|\mathbb{F}_q^*|}{|\ker \varphi|} = \frac{q-1}{2}$, doliczając 0 mamy tezę.

- Niech S będzie zbiorem wszystkich niezerowych kwadratów. S i dS to jedyne warstwy φ , więc każdy niezerowy element należy do jednej z nich.
- Niech T będzie zbiorem wszystkich kwadratów. Mamy $|T| = |x - T| = \frac{q+1}{2}$, więc te zbiory mają niepuste przecięcie.

$\square$

Propozycja 12. Niech F będzie niealternującą, symetryczną, nieosobliwą formą dwuliniową o macierzy M nad ciałem $\mathbb{K}$. Jeśli $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ i q jest potęgą liczby pierwszej większej od 2 a $d \in \mathbb{F}_q$ nie jest kwadratem, to $M \equiv \text{diag}(1, \dots, 1, \varepsilon)$, gdzie $\varepsilon \in \{1, d\}$.

Dowód. Dla $\dim V = 1$ mamy $M = [x]$ i można przeskalować przez kwadrat, dostając $[1]$ lub $[d]$. Dalej wystarczy rozważyć $\dim V = 2$, bo dla większych wymiarów można indukcyjnie rozpatrzyć kolejne minory: $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) \equiv \text{diag}(1, \varepsilon, a_3, \dots, a_n) \equiv \text{diag}(1, 1, \varepsilon, \dots, a_n)$ i tak dalej.

Mamy możliwości $\begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & db^2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} da^2 & 0 \\ 0 & db^2 \end{bmatrix}$. Pierwsze dwie po przemnożeniu przez kwa-

draty dają nam postać z tezy. Ostatnią można zredukować do $\begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$. Ustalmy $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_q$ takie, że $\alpha^2 + \beta^2 = d^{-1}$. Połóżmy $u = \alpha e_1 + \beta e_2$ oraz $v = \beta e_1 - \alpha e_2$. Mamy $\langle u, u \rangle = \langle v, v \rangle = d(\alpha^2 + \beta^2) = 1$. Do tego $\langle u, v \rangle = \alpha\beta d - \beta\alpha d = 0$. Zatem znaleźliśmy bazę, w której nasza forma jest zadana przez identyczność. $\square$

4. Twierdzenia Witt

2025-11-07

Lemat 3. Niech $f : A \rightarrow B$ będzie izometrią pomiędzy dwoma alternującymi lub symetrycznymi przestrzeniami i niech $A = A_1 \boxtimes A_1^\perp$. Wtedy $f(A_1)^\perp = f(A_1^\perp)$.

Dowód. Ustalmy $a \in A_1^\perp$ i $b = f(a') \in f(A_1)$. Wtedy $\langle f(a), b \rangle = \langle a, a' \rangle = 0$. Z tego wynika $f(A_1)^\perp \supseteq f(A_1^\perp)$, a te przestrzenie mają ten sam wymiar, więc mamy równość. $\square$

Lemat 4. Niech V, W będą nieosobliwymi przestrzeniami z formami dwuliniowymi. Do tego założymy, że te przestrzenie są alternujące (alternatywnie: że są symetryczne i $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$). Niech $S \leq V$, $T \leq W$ będą izometryczne. Obie podprzestrzenie S, T posiadają uzupełnienia nieosobliwe, to znaczy takie minimalne $\bar{S} \leq V$ i $\bar{T} \leq W$, że $S \leq \bar{S}$, $T \leq \bar{T}$ i $\bar{S}, \bar{T}$ są nieosobliwe. Do tego można wskazać takie $\bar{S}, \bar{T}$, że dowolna izometria $f : S \rightarrow T$ rozszerza się do izometrii $\bar{f} : \bar{S} \rightarrow \bar{T}$.

Dowód. Rozważmy dowolny wektor izotropowy $u \in V$ i podprzestrzeń E taką, że $\langle u \rangle \boxtimes E \leq V$. Twierdzimy, że istnieje taki wektor izotropowy $v \in E^\perp$, że $\langle u, v \rangle = 1$.

Mamy $u \notin E = (E^\perp)^\perp$, więc istnieje $v \in E^\perp$ taki, że $\langle u, v \rangle \neq 0$. Odpowiednie przeskalowanie v daje nam $\langle u, v \rangle = 1$. Jeśli V jest alternująca, to $\langle v, v \rangle = 0$ mamy od razu. Jeśli nie jest, to zauważmy, że $\alpha u + v \in E^\perp$ dla każdego $\alpha \in \mathbb{K}$. Do tego $\langle u, \alpha u + v \rangle = 1$. Możemy założyć symetryczność i charakterystykę różną od 2, więc $\langle \alpha u + v, \alpha u + v \rangle = 2\alpha + \langle v, v \rangle$ i podstawienie $\alpha = -\frac{\langle v, v \rangle}{2}$ daje nam szukany izotropowy wektor $\alpha u + v$.

Niech $S = \text{rad}(S) \boxtimes U_S$, gdzie U_S jest nieosobliwa i $\text{rad}(S) = \langle r_1, \dots, r_k \rangle$. Podstawiając w poprzednich rozważaniach $u = r_1$ i $E = \langle r_2, \dots, r_k \rangle \boxtimes U_S$ dostajemy wektor s_1 taki, że r_1, s_1 jest parą hiperboliczną. Powtarzając dla $u = r_2$ i $E = \langle r_1, r_3, \dots, r_k \rangle \boxtimes U_S$ dostajemy odpowiednie s_2 . Kontynuując dostajemy przestrzeń $\bar{S} = \langle r_1, s_1 \rangle \boxtimes \dots \boxtimes \langle r_k, s_k \rangle \boxtimes U_S$, która jest nieosobliwa, bo jest ortogonalną sumą przestrzeni nieosobliwych (płaszczyzna hiperboliczna jest nieosobliwa). Do tego $\bar{S}$ jest minimalną taką nadprzestrzenią S , bo usunięcie z niej s_i powodowałoby, że r_i znalazłoby się w radykale.

Podobnie mamy rozkład $T = \text{rad}(T) \boxtimes U_T$, gdzie $\text{rad}(T) = \langle f(r_1), \dots, f(r_k) \rangle$. Ta postać radykału wynika z faktu, że $f(\text{rad}(S)) \subseteq \text{rad}(T)$ oraz $f^{-1}(\text{rad}(T)) \subseteq \text{rad}(S)$, czyli $f(\text{rad}(S)) = \text{rad}(T)$.

Mamy więc uzupełnienie nieosobliwe $\bar{T} = \langle f(r_1), \tilde{s}_1 \rangle \boxtimes \dots \boxtimes \langle f(r_k), \tilde{s}_k \rangle \boxtimes U_T$ oraz wiemy, że $f(U_S) = U_T$. Pozostało nam zdefiniować $\tilde{f}(s_i) = \tilde{s}_i$. Odwzorowanie $\tilde{f} = f \cup \tilde{f}$ jest izometrią, bo jest nią na każdej składowej ortogonalnej. $\square$

Lemat 5. Niech V, W będą nieosobliwymi, izometrycznymi przestrzeniami z formami dwuliniowymi. Do tego założymy, że te przestrzenie są symetryczne i $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$. Ustalmy $u, v \in V$ takie, że $\langle u, u \rangle = \langle v, v \rangle \neq 0$. Wtedy istnieje izometria $f : V \rightarrow W$ taka, że $f(u) = v$ lub $f(u) = -v$.

Dowód. Łatwo pokazać, że jeśli $\langle w, w \rangle \neq 0$, to $\sigma_w(x) = x - 2\frac{\langle x, w \rangle}{\langle w, w \rangle}w$ jest izometrią (odbicie względem wektora). Mamy $u + v \perp u - v$. Co najmniej jeden z tych wektorów jest nieizotropowy, bo gdyby oba były, to $u + v + u - v = 2u$ też, ale wtedy u byłby izotropowy.

Jeśli $\langle u + v, u + v \rangle \neq 0$, to $\sigma_{u+v}(u + v) = -(u + v)$, $\sigma_{u+v}(u - v) = u - v$. Dodając stronami $\sigma_{u+v}(2u) = -2v$, można skrócić dwójki i mamy $\sigma_{u+v}(u) = -v$. Jeśli $\langle u - v, u - v \rangle \neq 0$, to analogicznie $\sigma_{u-v}(u) = v$. $\square$

Twierdzenie 11 (Witta o skracaniu). Niech V, W będą nieosobliwymi, izometrycznymi przestrzeniami z formami dwuliniowymi. Do tego założymy, że te przestrzenie są alternujące (alternatywnie: że są symetryczne i $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$). Niech $V = S \boxtimes S^\perp$ i $W = T \boxtimes T^\perp$ dla pewnych $S \leq V, T \leq W$ takich, że S i T są izometryczne. W takiej sytuacji $S^\perp$ jest izometryczne z $T^\perp$.

Dowód. S jest nieosobliwa, bo $V = S \boxtimes S^\perp$. Zatem $S^\perp$ również jest nieosobliwa. Podobnie $T^\perp$ jest nieosobliwa.

Dla formy alternującej mamy $S \simeq T \iff \dim S = \dim T \iff \dim S^\perp = \dim T^\perp \iff S^\perp \simeq T^\perp$, bo przestrzeń nieosobliwa z formą alternującą jest sumą ortogonalną płaszczyzn hiperbolicznych. Teraz rozważymy przypadek formy symetrycznej.

Bez straty ogólności możemy przyjąć $V = W$, bo jeśli $\sigma : V \rightarrow W$ jest izometrią, to $T \boxtimes T^\perp = W = \sigma(V) = \sigma(S) \boxtimes \sigma(S^\perp) = \sigma(S) \boxtimes \sigma(S)^\perp$. Jeśli udowodnimy twierdzenie dla $V = W$, to dostaniemy $\sigma(S)^\perp \simeq T^\perp$, a $S^\perp \simeq \sigma(S)^\perp$ da nam tezę.

Jeśli $\dim S = 1$, to $S = \langle u \rangle$, $T = \langle v \rangle$ i mamy $\langle u \rangle \boxtimes S^\perp = \langle v \rangle \boxtimes T^\perp$. Wiemy, że istnieje izometria $f : S \rightarrow T$ i możemy wybrać v tak, że $v = f(u)$. Wiemy, że $\langle u, u \rangle = \langle f(u), f(u) \rangle \neq 0$ (nieosobliwość), więc istnieje izometria $\iota : V \rightarrow V$ taka, że $\iota(u) = \pm f(u)$. W szczególności $\iota(S) = T$, więc $\iota(S^\perp) = \iota(S)^\perp = T^\perp$ i mamy odpowiednią izometrię.

Teraz pokażemy krok indukcyjny. Niech $\dim S = k + 1$ i niech $f : S \rightarrow T$ będzie izometrią. Wybierzmy nieizotropowy wektor $u \in S$ i połóżmy $S = \langle u \rangle \boxtimes U$. Takie u istnieje, bo gdyby forma była alternująca, to wobec charakterystyki różnej od 2 byłaby zerowa, a więc osobliwa. Mamy $\langle u \rangle \boxtimes U \boxtimes S^\perp = \langle f(u) \rangle \boxtimes f(U) \boxtimes T^\perp$. Z bazy indukcji istnieje izometria $\phi : U \boxtimes S^\perp \rightarrow f(U) \boxtimes T^\perp$.

Zawężając się do przestrzeni $V' = f(U) \boxtimes T^\perp = \phi(U) \boxtimes \phi(S^\perp)$ dostajemy z założenia indukcyjnego, że $T^\perp \simeq \phi(S^\perp)$, a $\phi(S^\perp) \simeq S^\perp$, więc mamy tezę. $\square$

Twierdzenie 12 (Witta o przedłużaniu). Niech V, W będą nieosobliwymi, izometrycznymi przestrzeniami z formami dwuliniowymi. Do tego założymy, że te przestrzenie są alternujące (alternatywnie: że są symetryczne i $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$). Niech $S \leq V, T \leq W$ i niech $f : S \rightarrow T$ będzie izometrią. Wtedy istnieje izometria $\tilde{f} : V \rightarrow W$ taka, że $\tilde{f}|_S = f$.

Dowód. Wiemy, że możemy rozszerzyć f do izometrii $\bar{f}$ zdefiniowanej pomiędzy uzupełnieniami nieosobliwymi $\bar{S}$ i $\bar{T}$. Zatem możemy bez straty ogólności założyć, że S i T są nieosobliwe. Wtedy $V = S \boxtimes S^\perp, W = T \boxtimes T^\perp$. Z twierdzenia o skracaniu istnieje izometria $\sigma : S^\perp \rightarrow T^\perp$. Każdy element $v \in V$ można jednoznacznie przedstawić w postaci $v = s + s'$ dla $s \in S$ i $s' \in S^\perp$. Definiujemy $\tilde{f}(s + s') = f(s) + \sigma(s')$, co jest izometrią. $\square$

5. Teoria kategorii

2025-11-14

Definicja 20. Mamy klasę obiektów $\mathcal{C}$. Dla każdych $A, B \in \mathcal{C}$ mamy klasę morfizmów $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ postaci $f : A \rightarrow B$, które można składać i które spełniają aksjomaty:

1. Jeśli mamy morfizmy $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ i $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$, to istnieje morfizm $g \circ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$.
2. Dla każdego $A \in \mathcal{C}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $\text{id}_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ taki, że $\text{id}_A \circ g = g$ i $f \circ \text{id}_A = f$ dla $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ i $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Inaczej mówiąc, poniższy diagram jest przemienny.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id}_A & & \\ & & \curvearrowright & & \\ C & \xrightarrow{g} & A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

3. Składanie jest łączne $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Przykład. 1. W kategorii zbiorów morfizmami są wszystkie funkcje.

2. W kategorii grup morfizmami to homomorfizmy grup.

3. W kategorii przestrzeni topologicznych morfizmami to funkcje ciągłe.

4. W kategorii przestrzeni wektorowych morfizmami to funkcje liniowe. Kategoria przestrzeni wektorowych nad ustalonym ciałem jest podkategorią tej kategorii.

Definicja 21. Praporządkiem (pre-order) nazywamy relację zwrotną, przechodnią, ale niekoniecznie antysymetryczną. Każdy praporządek zadaje kategorię, w której obiektami są elementy porządkowane przez praporządek, a morfizm $a \rightarrow b$ istnieje dokładnie wtedy, gdy $a \leq b$.

Definicja 22. Dla kategorii $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ funktorem nazywamy odwzorowanie $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ przyporządkowujące obiekty z jednej kategorii obiektom z drugiej kategorii, któremu towarzyszy odwzorowanie między morfizmami $F : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, A_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A_1), F(A_2))$ takie, że $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$ oraz $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

Przykład. Istnieją funktory zapominania (forgetful), które są zanurzeniem w większą kategorię, na przykład z przestrzeni topologicznych w zbiory.

Definicja 23. O zwykłych funktorach mówimy, że są kowariantne. Funktor jest kontrawariantny, jeśli indukowany funktor na morfizmach prowadzi $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, A_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A_2), F(A_1))$. Wtedy też $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$.

Definicja 24. Dla ustalonego $A \in \mathcal{C}$ funktorem Yonedy nazywamy funktor $\mathcal{C} \ni X \rightarrow \text{Hom}(A, X) \in \text{Set}$, który każdemu X przyporządkowuje zbiór morfizmów z A do X . Kontrawariantny funktor Yonedy dokonuje przypisania $\mathcal{C} \ni X \rightarrow \text{Hom}(X, A) \in \text{Set}$.

Definicja 25. Niech $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ będą funktorami (kowariantnymi). Naturalna transformacja $F \Rightarrow G$ to kolekcja morfizmów $\eta_X : F(X) \rightarrow G(X)$ takich, że dla morfizmu $f : X \rightarrow Y$ istnieje morfizm $\eta_Y : F(Y) \rightarrow G(Y)$ taki, że poniższy diagram jest przemienny, czyli $G(f) \circ \eta_X = \eta_Y \circ F(f)$. Dla funktorów kontrawariantnych odpowiednie strzałki się odwracają.

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\eta_X} & G(X) \\ \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\eta_Y} & G(Y) \end{array}$$

Definicja 26. Naturalny izomorfizm $F \simeq G$ to naturalna transformacja taka, że każde $\eta_X : F(X) \rightarrow G(X)$ jest izomorfizmem.

Przykład. Wiemy, że dla skończonej wymiarowej przestrzeni wektorowej V o bazie $\{e_1, \dots, e_n\}$ mamy izomorfizm z V^* zadany przez bazę $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$. Taki izomorfizm nie jest naturalny. Z kolei odwzorowanie $V \ni v \rightarrow (V^* \ni f \rightarrow f(v)) \in V^{**}$ jest naturalnym izomorfizmem.

Definicja 27. Rozważmy praporządek i funktor F z tego praporządku w kategorię $\mathcal{C}$. Ten funktor zadaje nam obiekty $\{C_i\}$ oraz morfizmy $f_{ij} : C_i \rightarrow C_j$ dla każdych i, j takich, że $i \leq j$. Stożkiem tego

funktora nazywamy obiekt Δ_F taki, że istnieją morfizmy $\varphi_i : \Delta_F \rightarrow C_i$ takie, że

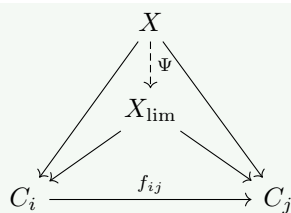
$$\begin{array}{ccc} & \Delta_F & \\ \varphi_i \swarrow & & \searrow \varphi_j \\ C_i & \xrightarrow{f_{ij}} & C_j \end{array}$$

jest przemienny. Kostożkiem nazywamy element ∇_F taki, że istnieją morfizmy $\varphi_i : C_i \rightarrow \nabla_F$ takie,

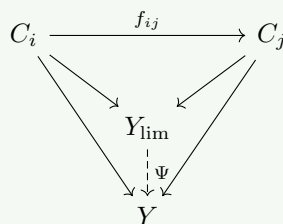
$$\begin{array}{ccc} C_i & \xrightarrow{f_{ij}} & C_j \\ \varphi_i \searrow & & \swarrow \varphi_j \\ & \nabla_F & \end{array}$$

jest przemienny.

Definicja 28. Rozważmy praporządek i funktor F z tego praporządku w kategorię $\mathcal{C}$. Granicą nazywamy taki stożek X_{lim} , że dla każdego stożka X istnieje jedyny morfizm $\Psi : X \rightarrow X_{\text{lim}}$, dla którego poniższy diagram jest przemienny.

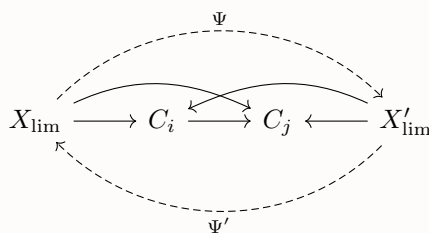


Definicja 29. Rozważmy praporządek i funktor F z tego praporządku w kategorię $\mathcal{C}$. Kogranicą nazywamy taki kostożek Y_{lim} , że dla każdego kostożka Y istnieje jedyny morfizm $\Psi : Y_{\text{lim}} \rightarrow Y$, dla którego poniższy diagram jest przemienny.



Twierdzenie 13. Jeśli (ko)granica istnieje, to jest jedyna z dokładnością do jedynego izomorfizmu.

Dowód. Z przemienności poniższego diagramu mamy, że $\text{id}_{X'_{\text{lim}}} = \Psi \circ \Psi'$ i $\text{id}_{X_{\text{lim}}} = \Psi' \circ \Psi$.



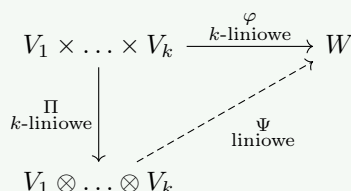
□

6. Produkt tensorowy

2025-11-28

Definicja 30. Niech $V_1, \dots, V_k, W$ będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{K}$. $f : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$ jest formą k -liniową, jeśli jest liniowa ze względu na każdą współzrzedną.

Definicja 31. Niech $V_1, \dots, V_k$ będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{K}$. Produktem (iloczynem) tensorowym nazywamy (jedyny) obiekt $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ wraz z k -liniowym morfizmem Π taki, że dla dowolnego W i k -liniowego $\varphi : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$ istnieje jedyne odwzorowanie liniowe $\Psi : V_1 \otimes \dots \otimes V_k \rightarrow W$ takie, że poniższy diagram jest przemienny.



Uwaga. Jeśli produkt tensorowy istnieje, to jest jedyny z dokładnością do jedynego izomorfizmu.

Lemat 6. Dla dowolnych przestrzeni A, B, C zachodzi

$$(A \otimes B) \otimes C \simeq A \otimes B \otimes C \simeq A \otimes (B \otimes C).$$

Zatem produkt tensorowy trzech przestrzeni jest tym samym, co produkt tensorowy produktu ten-

sorowego dwóch przestrzeni z trzecią przestrzenią.

Dowód. Pokażemy, że $(A \otimes B) \otimes C$ spełnia tę samą własność uniwersalną, co $A \otimes B \otimes C$. Dowód dla $A \otimes (B \otimes C)$ jest identyczny.

Niech $\varphi : A \times B \times C \rightarrow W$ będzie odwzorowaniem 3-liniowym. Dla ustalonego $c \in C$ odwzorowanie zadane przez $\varphi_c = \varphi(\cdot, \cdot, c) : A \times B \rightarrow W$ jest dwuliniowe, więc z własności uniwersalnej $A \otimes B$ istnieje liniowe odwzorowanie $\Phi_c : A \otimes B \rightarrow W$ takie, że $\varphi_c = \Phi_c \circ \Pi$.

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\varphi_c} & W \\ \Pi \downarrow & \nearrow \Phi_c & \\ A \otimes B & & \end{array}$$

Funkcja $\Phi : (A \otimes B) \times C \ni (x, c) \rightarrow \Phi_c(x) \in W$ jest dwuliniowa. Rzeczywiście, liniowość ze względu na pierwszy argument wynika z liniowości Φ_c , a liniowość ze względu na drugi wynika z tego, że dla $c, c' \in C$ mamy $\varphi_{\alpha c + \beta c'} = \alpha \varphi_c + \beta \varphi_{c'} = (\alpha \Phi_c + \beta \Phi_{c'}) \circ \Pi$, więc $\Phi_{\alpha c + \beta c'} = \alpha \Phi_c + \beta \Phi_{c'}$ z jedyności funkcji Φ_c dla ustalonego c .

Zatem z własności uniwersalnej dla produktu tensorowego $(A \otimes B) \otimes C$ istnieje dokładnie jedna funkcja $\Psi : (A \otimes B) \otimes C \rightarrow W$ taka, że dolna część poniższego diagramu jest przemienna. Mamy $\varphi = \Phi \circ (\Pi, \text{id})$, więc jej przemienność jest równoważna z przemiennością całego diagramu. Zatem Ψ jest jedyną funkcją, dla której ten diagram jest przemienny i mamy tezę.

$$\begin{array}{ccc} A \times B \times C & \xrightarrow{\varphi} & W \\ (\Pi, \text{id}) \downarrow & \nearrow \Phi & \uparrow \Psi \\ (A \otimes B) \times C & \longrightarrow & (A \otimes B) \otimes C \end{array}$$

□

Lemat 7. Niech $A \otimes_{\mathbb{K}} B$ będzie takim obiektem (z zadaną formą dwuliniową $\Pi_{\mathbb{K}} : A \times B \rightarrow A \otimes_{\mathbb{K}} B$), że dla każdego dwuliniowego $\xi : A \times B \rightarrow \mathbb{K}$ istnieje jedyne odwzorowanie liniowe $\Psi : A \otimes_{\mathbb{K}} B \rightarrow \mathbb{K}$ takie, że poniższy diagram jest przemienny. Wtedy $A \otimes_{\mathbb{K}} B \simeq A \otimes B$.

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\xi} & \mathbb{K} \\ \Pi_{\mathbb{K}} \downarrow & \nearrow \Psi & \\ A \otimes_{\mathbb{K}} B & & \end{array}$$

Dowód. Mamy $W \simeq \mathbb{K}^n$ dla pewnego n . Niech $\varphi : A \times B \rightarrow W$ będzie dwuliniowe. Wtedy jego rzut na i -tą współrzędną $\varphi_i = \pi_i \circ \varphi$ (gdzie π_i jest rzutowaniem $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ połączonym z izomorfizmem $W \simeq \mathbb{K}^n$) również jest dwuliniowy. Zatem istnieje jedyne odwzorowanie liniowe $\Psi_i : A \otimes_{\mathbb{K}} B \rightarrow \mathbb{K}$ takie, że $\varphi_i = \Psi_i \circ \Pi_{\mathbb{K}}$. Zdefiniujmy $\Psi = \sum_{i=1}^n \iota_i \circ \Psi_i$ (gdzie ι_i jest zanurzeniem $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}^n$ połączonym z izomorfizmem $\mathbb{K}^n \simeq W$). Mamy $\varphi = \sum_{i=1}^n \iota_i \circ \varphi_i = \Psi \circ \Pi_{\mathbb{K}}$. Do tego Ψ jednoznacznie wyznacza $\Psi_i = \pi_i \circ \Psi$, więc jest jedyne. Całą sytuację obrazuje poniższy diagram.

$$\begin{array}{ccccc} A \times B & \xrightarrow{\varphi} & W \simeq \mathbb{K}^n & \xrightleftharpoons[\iota_i]{\pi_i} & \mathbb{K} \\ \Pi_{\mathbb{K}} \downarrow & \nearrow \Psi & & & \uparrow \\ A \otimes_{\mathbb{K}} B & \xrightarrow{\Psi_i} & \mathbb{K} & & \end{array}$$

□

Notacja. przez $\text{BiLin}(A, B)$ oznaczamy przestrzeń form dwuliniowych $A \times B \rightarrow \mathbb{K}$.

Twierdzenie 14. Dla skończone wymiarowych przestrzeni A, B produkt tensorowy $A \otimes B$ istnieje.

Dowód. Pokażemy, że odpowiednim produktem tensorowym jest przestrzeń $\text{BiLin}(A, B)^*$ (przestrzeń dualna form dwuliniowych). Już wiemy, że wystarczy wykazać własność uniwersalną dla morfizmów idących w ciało. Zaczynamy od zdefiniowania odwzorowania $\Pi : A \times B \rightarrow \text{BiLin}(A, B)^*$ wzorem $\Pi(a, b)(f) = f(a, b)$.

Niech $\varphi : A \times B \rightarrow \mathbb{K}$ będzie formą dwuliniową. Definiujemy $\Psi : \text{BiLin}(A, B)^* \ni F \rightarrow F(\varphi) \in \mathbb{K}$. Mamy $(\Psi \circ \Pi)(a, b) = \Pi(a, b)(\varphi) = \varphi(a, b)$. Niech A', B' będą bazami odpowiednio A i B . Zauważmy, że rozważana przestrzeń funkcjonałów $\text{BiLin}(A, B)^*$ jest rozpinana przez zbiór funkcjonałów $\{f \rightarrow f(a, b) : a \in A', b \in B'\}$, co wynika z konstrukcji bazy przestrzeni dualnej (tutaj ważny jest skończony wymiar). Zatem $\Pi(A \times B) = \text{BiLin}(A, B)^*$ i Ψ jest wyznaczone jednoznacznie, bo wartości na $\Pi(A \times B)$ muszą być takie, jakie są.

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{K} \\ \Pi \downarrow & \nearrow \Psi & \\ \text{BiLin}(A, B)^* & & \end{array}$$

□

Uwaga. Istnienie produktu tensorowego dwóch przestrzeni implikuje istnienie produktu tensorowego dowolnej skończonej ilości przestrzeni. Zatem wiemy, że produkt tensorowy $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ istnieje.

Definicja 32. Niech V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad $\mathbb{K}$. Przez $\mathcal{A}(V, W)$ oznaczamy (wolną) przestrzeń wektorową nad $\mathbb{K}$ o bazie $\{e_{v,w} : v \in V, w \in W\}$. Wprowadzamy oznaczenie $v \otimes w = e_{v,w}$.

Przykład. Jeśli $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\dim V = \dim W = 1$, to w $\mathcal{A}(V, W)$ mamy bazę $\{z_1 \otimes z_2 : z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$, a więc $\dim \mathcal{A} = \mathfrak{c}$.

Definicja 33. Dla przestrzeni wektorowych V, W oraz przestrzeni $\mathcal{A}(V, W)$ definiujemy

$$\mathcal{L} = \text{span} \left\{ \begin{array}{l} (\alpha v) \otimes (\beta w) - \alpha \beta (v \otimes w), \\ (v_1 + v_2) \otimes w - v_1 \otimes w - v_2 \otimes w \\ v \otimes (w_1 + w_2) - v \otimes w_1 - v \otimes w_2 \end{array} : \alpha, \beta \in \mathbb{K}, v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W \right\}.$$

Twierdzenie 15. $\mathcal{A}(V, W)/\mathcal{L}$ wraz z odwzorowaniem $\Pi : V \times W \ni (v, w) \rightarrow [v \otimes w] \in \mathcal{A}(V, W)/\mathcal{L}$ jest produktem tensorowym $V \otimes W$.

Dowód. Dwuliniowość Π wynika wprost z definicji przestrzeni $\mathcal{L}$. Niech $\varphi : V \times W \rightarrow T$ będzie dwuliniowe. Definiujemy $\Psi : \mathcal{A}(V, W)/\mathcal{L} \ni [v \otimes w] \rightarrow \varphi(v, w) \in T$ poprzez wskazanie wartości na bazie. Jest to dobrze określone, bo z dwuliniowości φ przestrzeń $\mathcal{L}$ leży w jądrze odwzorowania $v \otimes w \rightarrow \varphi(v, w)$, a więc to odwzorowanie faktoryzuje się przez iloraz. Oczywiście $\Psi \circ \Pi = \varphi$. Wartość Ψ na wektorach postaci $[v \otimes w]$ jest wymuszona przez φ , a więc Ψ jest jedyne. □

Twierdzenie 16. Niech E i F będą bazami V i W . Przestrzeń $\text{span} \{e \otimes f : e \in E, f \in F\}$ z zadaniem odwzorowaniem $\Pi \left(\sum_{e \in E} a_e e, \sum_{f \in F} b_f f \right) = \sum_{e \in E, f \in F} a_e b_f e \otimes f$ jest produktem tensorowym $V \otimes W$.

Dowód. Dwuliniowość Π jest jasna. Niech $\varphi : V \times W \rightarrow T$ będzie dwuliniowe. Niech $\Psi(e \otimes f) = \varphi(e, f)$ dla $e \in E, f \in F$. Oczywiście $\Psi \circ \Pi = \varphi$, a jedyność wynika z tego, że φ wymusza wartości na $e \otimes f$. □

Uwaga. Wskazaliśmy trzy izomorficzne konstrukcje produktu tensorowego. W pierwszej dowód jedyność wymagał wskazania bazy, w trzeciej sama konstrukcja tego wymagała. W drugiej nie korzystaliśmy z wyboru bazy, ale wprowadzone definicje były dużo bardziej rozbudowane niż w dwóch pozostałych konstrukcjach.

Mamy izomorfizm między trzecią a drugą konstrukcją zadany przez $e \otimes f \rightarrow [e_{e,f}]$. O przestrzeni $V \otimes W$ będziemy zazwyczaj myśleć jak o przestrzeni kombinacji liniowych elementów postaci $v \otimes w$ z bazą $\{e \otimes f : e \in E, f \in F\}$ (trzecia konstrukcja), w której „operator” $\otimes$ jest dwuliniowy – $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$ i tak dalej (druga konstrukcja).

Definicja 34. Tensor $t \in V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ nazywamy prostym, jeśli istnieją $v_i \in V_i$ takie, że $t = v_1 \otimes \dots \otimes v_n$.

Ranga tensora t to najmniejsza liczba $\text{rk}(t) \in \mathbb{N}$ taka, że t jest sumą $\text{rk}(t)$ tensorów prostych.

Przykład. Odwzorowanie $m : \mathcal{M}_{n \times n} \times \mathcal{M}_{n \times n} \ni (A, B) \rightarrow AB \in \mathcal{M}_{n \times n}$ jest dwuliniowe, a więc istnieje odpowiadający mu tensor. Rangę tego tensora można powiązać z liczbą mnożeń potrzebnych do wymnożenia tych macierzy. Ograniczenia na nią wiążą się więc z tym, jak szybko jesteśmy w stanie mnożyć macierze.

7. Formy wieloliniowe

2025-12-12

Definicja 35. Mówimy, że forma k -liniowa $f : V^k \rightarrow \mathbb{K}$ jest:

- symetryczna, jeśli $f(v_1, \dots, v_k) = f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$ dla każdego $\sigma \in S_k$.
- antysymetryczna, jeśli $f(v_1, \dots, v_k) = \text{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$ dla każdego $\sigma \in S_k$.
- alternująca, jeśli $f(v_1, \dots, v_k) = 0$ gdy tylko $v_i = v_j$ dla pewnych $i \neq j$.

Propozycja 13. Jeśli forma k -liniowa jest alternująca, to jest antysymetryczna. Jeśli $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$, to forma antysymetryczna jest alternująca.

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned} 0 &= f(v_1, \dots, v_i + v_{i+1}, v_i + v_{i+1}, \dots, v_k) = f(v_1, \dots, v_i, v_i, \dots, v_k) + f(v_1, \dots, v_{i+1}, v_{i+1}, \dots, v_k) \\ &\quad + f(v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k) + f(v_1, \dots, v_{i+1}, v_i, \dots, v_k) \\ &= f(v_1, \dots, v_i, v_i, \dots, v_k) + f(v_1, \dots, v_{i+1}, v_{i+1}, \dots, v_k), \end{aligned}$$

co daje jedną stronę tezy dla transpozycji sąsiednich elementów, a więc dla wszystkich permutacji. Przy $i < j$ z antysymetryczności $f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$, więc dla $v_i = v_j$ i przy $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ obie strony są równe 0.

□

Definicja 36. Potęga symetryczna $S^k V$ to taka przestrzeń wraz k -liniowym odwzorowaniem symetrycznym $\Pi : V^k \rightarrow S^k V$, że dla każdej symetrycznej formy k -liniowej f istnieje jedyne odwzorowanie liniowe $\Psi : S^k V \rightarrow \mathbb{K}$ takie, że poniższy diagram jest przemienny.

$$\begin{array}{ccc} V^k & \xrightarrow{f} & \mathbb{K} \\ \Pi \downarrow & \nearrow \Psi & \\ S^k V & & \end{array}$$

Definicja 37. Potęga zewnętrzna $\bigwedge^k V$ to taka przestrzeń wraz z k -liniowym odwzorowaniem alternującym $\Pi : V^k \rightarrow \bigwedge^k V$, że dla każdej alternującej formy k -liniowej f istnieje jedyne odwzorowanie liniowe $\Psi : \bigwedge^k V \rightarrow \mathbb{K}$ takie, że poniższy diagram jest przemienny.

$$\begin{array}{ccc} V^k & \xrightarrow{f} & \mathbb{K} \\ \Pi \downarrow & \nearrow \Psi & \\ \bigwedge^k V & & \end{array}$$

Notacja. Przez $V^{\otimes k}$ mamy na myśli przestrzeń $\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{k \text{ razy}}$.

Twierdzenie 17. Potęga symetryczna $S^k V$ i potencja zewnętrzna $\bigwedge^k V$ istnieją.

Dowód. Niech $I_s^k = \text{span} \{v_1 \otimes \dots \otimes v_k - v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)} : \forall_{i \in [k]} v_i \in V, \sigma \in S_k\}$. Pokażemy, że przestrzeń $V^{\otimes k} / I_s^k$ jest odpowiednią potęgą symetryczną. Niech $f : V^k \rightarrow \mathbb{K}$ będzie symetrycznym odwzorowaniem k -liniowym. Istnieje jedyne odwzorowanie liniowe $\Psi : V^{\otimes k} \rightarrow \mathbb{K}$ takie, że $f = \Psi \circ \Pi$. Zauważmy, że jest ono symetryczne (symetria f daje symetrię Ψ na bazie, więc Ψ jest symetryczne).

Niech $\tilde{\Pi}$ będzie złożeniem Π z rzutowaniem na rozważaną przestrzeń ilorazową. Z symetryczności Ψ odwzorowanie $\tilde{\Psi} : V^{\otimes k} / I_s^k \ni [v] \rightarrow \Psi(v)$ jest poprawnie określone. Jest to jedyny sposób na określenie odwzorowania spełniającego $f = \tilde{\Psi} \circ \tilde{\Pi}$, zatem dowód jest zakończony.

$$\begin{array}{ccc}
 V^k & \xrightarrow{f} & \mathbb{K} \\
 \Pi \downarrow & \nearrow \Psi & \uparrow \\
 V^{\otimes k} & & \\
 \downarrow & \nearrow \tilde{\Psi} & \\
 V^{\otimes k} / I_s^k & &
 \end{array}$$

Dla potęgi zewnętrznej identyczny argument korzysta z wydzielenia przez przestrzeń

$$I_a^k = \text{span} \{v_1 \otimes \dots \otimes v_k : \forall_{\ell \in [k]} v_\ell \in V, \exists_{i,j \in [k], i \neq j} v_i = v_j\}.$$

□

Uwaga. Korzystając z konstrukcji produktu tensorowego przez przestrzeń odwzorowań k -liniowych możemy też uzyskać

$$\begin{aligned}
 S^k V &= \text{Lin}_k(V, \mathbb{K})^* / \text{span} \{f \in \text{Lin}_k(V, \mathbb{K})^* : \forall_{\varphi \text{ symetryczne}} f(\varphi) = 0\}, \\
 \bigwedge^k V &= \text{Lin}_k(V, \mathbb{K})^* / \text{span} \{f \in \text{Lin}_k(V, \mathbb{K})^* : \forall_{\varphi \text{ alternujące}} f(\varphi) = 0\}.
 \end{aligned}$$

Notacja. Dla elementu $[v_1 \otimes \dots \otimes v_k] \in S^k V$ stosujemy notację $v_1 \cdot \dots \cdot v_k$.

Dla elementu $[v_1 \otimes \dots \otimes v_k] \in \bigwedge^k V$ stosujemy notację $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$.

Lemat 8. Niech $v_i \in V$. Zachodzi $v_1 \wedge \dots \wedge v_k = 0 \iff v_1, \dots, v_k$ są liniowo zależne.

Dowód. ($\implies$) Załóżmy, że $v_1, \dots, v_k$ są liniowo niezależne i uzupełnijmy je do bazy elementami $v_{k+1}, \dots, v_n$. Utożsamiając $(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \wedge (v_{k+1} \wedge \dots \wedge v_n)$ z funkcjonalem na przestrzeni odwzorowań n -liniowych widzimy, że nie zeruje się on na wyznaczniku, bo $\det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$. Wyznacznik jest antysymetryczny, więc rozważany funkcjonal jest niezerowy (nawet w przestrzeni ilorazowej). W szczególności $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ jest niezerowy.

($\impliedby$) Jeśli $v_\ell = \sum_{i \neq \ell} a_i v_i$, to

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_\ell \wedge \dots \wedge v_k = v_1 \wedge \dots \wedge \sum_{i \neq \ell} a_i v_i \wedge \dots \wedge v_k = \sum_{i \neq \ell} a_i (v_1 \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_k) = 0.$$

□

Propozycja 14. Niech $\{e_1, \dots, e_n\}$ będzie bazą V . Bazą przestrzeni $\bigwedge^k V$ jest zbiór

$$\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}.$$

Dowód. Mamy $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$ (wynika z rozpisania $0 = (e_i + e_j) \wedge (e_i + e_j)$). Dla $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ istnieje takie $\sigma \in S_k$, że $i_{\sigma(1)} \leq \dots \leq i_{\sigma(k)}$. Wtedy $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = \text{sgn}(\sigma) e_{i_{\sigma(1)}} \wedge \dots \wedge e_{i_{\sigma(k)}}$. Co więcej można założyć, że nierówności są ostre, bo inaczej rozważany element się zeruje. Zatem rozważany zbiór generuje $\bigwedge^k V$ (bo elementy postaci $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ są obrazem bazy produktu tensorowego w

rzutowaniu na odpowiednią przestrzeń ilorazową).

Założmy, że $\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = 0$. Ustalmy jeden element $e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k}$ i ponumerujmy pozostałe elementy rozważanej bazy V tak, by miała ona postać $\{e_{j_1}, \dots, e_{j_k}, e_{j_{k+1}}, \dots, e_{j_n}\}$. Wtedy domnażając przez $e_{j_{k+1}} \wedge \dots \wedge e_{j_n}$ mamy

$$0 = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) \wedge (e_{j_{k+1}} \wedge \dots \wedge e_{j_n}) = a_{j_1 \dots j_k} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k} \wedge e_{j_{k+1}} \wedge \dots \wedge e_{j_n},$$

więc $a_{j_1 \dots j_k} = 0$. Wobec dowolności tego ciągu mamy liniową niezależność. $\square$

Propozycja 15. Niech $\{e_1, \dots, e_n\}$ będzie bazą V . Bazą przestrzeni $S^k V$ jest zbiór

$$\{e_{i_1} \dots e_{i_k} : 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n\}.$$

Dowód. Mamy $e_i e_j = e_j e_i$. Dla $e_{i_1} \dots e_{i_k}$ istnieje takie $\sigma \in S_k$, że $i_{\sigma(1)} \leq \dots \leq i_{\sigma(k)}$. Wtedy $e_{i_1} \dots e_{i_k} = e_{i_{\sigma(1)}} \dots e_{i_{\sigma(k)}}$. Zatem rozważany zbiór generuje $S^k V$ (bo elementy postaci $e_{i_1} \dots e_{i_k}$ są obrazem bazy produktu tensorowego w rzutowaniu na odpowiednią przestrzeń ilorazową).

Założmy, że $\sum_{i_1 \leq \dots \leq i_k} a_{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \dots e_{i_k} = 0$. Utożsamiamy 0 z $F \in (\text{Lin}_k(V, \mathbb{K}))^*$ takim, że $F(\varphi) = 0$ dla każdego φ symetrycznego. Niech $H_{j_1 \dots j_k}$ będzie stabilizatorem działania S_k na ciąg $j_1 \leq \dots \leq j_k$.

Ustalmy symetryczną funkcję k -liniową $\varphi_{j_1 \dots j_k} = \sum_{\sigma \in S_k / H_{j_1 \dots j_k}} e_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(k)}}^*$ (bierzemy po jednym reprezentancie z każdej warstwy – definiowana funkcja nie zależy od wyboru reprezentantów, bo elementy jednej warstwy różnią się tylko tym, gdzie posyłają elementy ciągu o tej samej wartości). Dostajemy teraz $0 = F(\varphi_{j_1 \dots j_k}) = a_{j_1 \dots j_k}$. Wobec dowolności $j_1 \dots j_k$ mamy liniową niezależność. $\square$

Wniosek. 1. $\bigwedge^k V = \{0\}$ dla $k > n$.

2. $\bigwedge^k V \simeq \bigwedge^{n-k} V$ dla $0 \leq k \leq n$.

3. $\dim S^k V \rightarrow +\infty$.

4. $S^k V$ jest izomorficzne z przestrzenią $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_k$ wielomianów n zmiennych stopnia k .

Dowód. 1. Nie istnieje k elementowy ściśle rosnący ciąg o elementach z $\{1, \dots, n\}$.

2. Dla ciągu $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ istnieje dokładnie jeden ciąg $1 \leq i'_1 < \dots < i'_{n-k} \leq n$ taki, że $\{i_1, \dots, i_k, i'_1, \dots, i'_{n-k}\} = \{1, \dots, n\}$. Posyłając $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \rightarrow e_{i'_1} \wedge \dots \wedge e_{i'_{n-k}}$ dostajemy izomorfizm.

3. Oczywiście.

4. Posyłając $e_{i_1} \dots e_{i_k} \rightarrow x_{i_1} \dots x_{i_k}$ dostajemy izomorfizm. $\square$

Notacja. Permutację $\sigma \in S_k$ można utożsamiać z odwzorowaniem $\sigma : V^k \rightarrow V^k$ zadany przez

$$\sigma((v_{i_1}, \dots, v_{i_k})) = (v_{\sigma(i_1)}, \dots, v_{\sigma(i_k)}).$$

Odpowiadające mu odwzorowanie na tensorach $\sigma : V^{\otimes k} \rightarrow V^{\otimes k}$ jest zadane tym samym wzorem.

Definicja 38. Tensor $t \in V^{\otimes k}$ jest symetryczny, jeśli $\sigma(t) = t$ dla każdego $\sigma \in S_k$.

Tensor $t \in V^{\otimes k}$ jest antysymetryczny, jeśli $\sigma(t) = \text{sgn}(\sigma) t$ dla każdego $\sigma \in S_k$.

Definicja 39. Przy $\text{char } \mathbb{K} = 0$ definiujemy symetryzację $S : V^{\otimes k} \ni t \rightarrow \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \sigma(t)$ oraz antysymetryzację $A : V^{\otimes k} \ni t \rightarrow \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \sigma(t)$. Odwzorowanie te posyłają tensory odpowiednio w przestrzeń tensorów symetrycznych i antysymetrycznych.

8. Algebry tensorowe

Definicja 40. Mnożenie tensorów to odwzorowanie dwuliniowe $m_{k,\ell} : V^{\otimes k} \times V^{\otimes \ell} \rightarrow V^{\otimes(k+\ell)}$ zadane przez

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_k, w_1 \otimes \dots \otimes w_\ell) \rightarrow v_1 \otimes \dots \otimes v_k \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_\ell.$$

Notacja. Dla $v \in V^{\otimes k}$ i $w \in V^{\otimes \ell}$ piszemy $v \otimes w = m_{k,\ell}(v, w)$.

Uwaga. Mnożenie tensorów jest zgodne ze strukturami potęgi symetrycznej i zewnętrznej. Oznacza to, że mamy dobrze zdefiniowane operacje mnożenia $S^k V \times S^\ell V \ni (t, s) \rightarrow ts \in S^{k+\ell} V$ oraz $\bigwedge^k V \times \bigwedge^\ell V \ni (t, s) \rightarrow t \wedge s \in \bigwedge^{k+\ell} V$.

Definicja 41. Algebrą nad $\mathbb{K}$ nazywamy pierścień A (w naszym przypadku z jedyneką), który jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$. Inaczej mówiąc: odwzorowanie zadane przez $1_{\mathbb{K}} \rightarrow 1_A$ jest monomorfizmem.

Definicja 42. Niech V będzie przestrzenią wektorową. Przestrzenie

$$\begin{aligned} TV &= \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes k}, \\ SV &= \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k V, \\ \bigwedge V &= \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigwedge^k V \end{aligned}$$

nazywamy odpowiednio algebrą tensorową, algebrą symetryczną oraz algebrą zewnętrzną.

Uwaga. Mamy $\dim \bigwedge V < \infty$, bo $\bigwedge^k V = \{0\}$ dla $k > \dim V$. Przestrzenie TV i SV są nieskończonego wymiaru.

Uwaga. Mnożenie tensorów jest łączne, co wynika z naturalnego izomorfizmu $(A \otimes B) \otimes C \simeq A \otimes (B \otimes C)$. Z tego od razu mamy, że wprowadzone przestrzenie są algebrami (pozostałe aksjomaty łatwo widać).

Uwaga. Z definicji potęgi symetrycznej i zewnętrznej istnieją epimorfizmy $\pi_s^k : V^{\otimes k} \rightarrow S^k V$ oraz $\pi_a^k : V^{\otimes k} \rightarrow \bigwedge^k V$. Sumują się one do epimorfizmów $\pi_s : TV \rightarrow SV$ i $\pi_a : TV \rightarrow \bigwedge V$.

Twierdzenie 18. Jądem epimorfizmu $\pi_s : TV \rightarrow SV$ jest ideał (dwustronny) $I_s \subseteq TV$ generowany przez elementy postaci $v \otimes w - w \otimes v$, gdzie $v, w \in V$.

Dowód. Mamy $v \otimes w - w \otimes v \in \ker \pi_s^2 \subseteq \ker \pi_s$, więc $I_s \subseteq \ker \pi_s$.

Niech $\sigma, \tau \in S_k$. Jeżeli dla dowolnego $t \in V^{\otimes k}$ mamy $t - \sigma(t), t - \tau(t) \in I_s$, to mamy

$$t - (\tau \circ \sigma)(t) = t - \tau(\sigma(t)) = (t - \sigma(t)) + (\sigma(t) - \tau(\sigma(t))) \in I_s.$$

Zatem wystarczy wykazać tezę dla σ będącego transpozycją sąsiednich elementów i i $i+1$. Niech $t = v_1 \otimes v_i \otimes v_{i+1} \otimes \dots \otimes v_k$. Mamy $v_i \otimes v_{i+1} - v_{i+1} \otimes v_i \in I_s$. Domnażając z lewej strony przez $v_1 \otimes \dots \otimes v_{i-1}$ a z prawej przez $v_{i+2} \otimes \dots \otimes v_k$ dostajemy $t - \sigma(t) \in I_s$. Z tego wynika, że $\ker \pi_s \subseteq I_s$, a więc mamy tezę. $\square$

Twierdzenie 19. Jądem epimorfizmu $\pi_a : TV \rightarrow \bigwedge V$ jest ideał (dwustronny) $I_a \subseteq TV$ generowany przez elementy postaci $v \otimes v$, gdzie $v \in V$.

Dowód. Mamy $v \otimes v \in \ker \pi_a^2 \subseteq \ker \pi_a$, więc $I_a \subseteq \ker \pi_a$. Pozostaje pokazać, że $v_1 \otimes \dots \otimes v_k \in I_a$ gdy

$v_i = v_{i+j}$ dla pewnych i, j . I_a jest ideałem dwustronnym, więc wystarczy pokazać $v_i \otimes \dots \otimes v_{i+j} \in I_a$. Dla $j = 1$ tezę mamy natychmiast. Niech $j > 1$ i $v = v_i = v_{i+j}$, $w = v_{i+j-1}$. Mamy

$$I_a \ni v \otimes \dots \otimes (v + w) \otimes (v + w) = \\ (v \otimes \dots \otimes v \otimes v) + (v \otimes \dots \otimes w \otimes w) + (v \otimes \dots \otimes v \otimes w) + (v \otimes \dots \otimes w \otimes v).$$

Pierwszy i drugi czynnik należą do I_s z definicji, a trzeci z założenia indukcyjnego. Zatem czwarty również należy do I_a , co kończy dowód kroku indukcyjnego. $\square$

Wniosek. Zachodzi $SV \simeq TV/I_s$ i $\bigwedge V \simeq TV/I_a$.

Twierdzenie 20. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$ a A algebrą nad $\mathbb{K}$. Niech $\iota : V \rightarrow TV$ będzie inkluzją. Dla dowolnego homomorfizmu przestrzeni wektorowych $f : V \rightarrow A$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm algebr $F(f) = F : TV \rightarrow A$ taki, że $F \circ \iota = f$.

Dowód. Definiujemy szukany homomorfizm na tensorach prostych: dla $v_1 \otimes \dots \otimes v_k \in V^{\otimes k}$ ustalamy $F(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = f(v_1) \dots f(v_k)$. Do tego $F(1) = 1$. To odwzorowanie oczywiście spełnia żądane własności, a konieczna równość $F(v) = f(v)$ dla $v \in V^{\otimes 1}$ implikuje, że odwzorowanie to jest jedyne. $\square$

Wniosek. Niech V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad $\mathbb{K}$. Homomorfizm $f : V \rightarrow W$ indukuje homomorfizm $Tf : TV \rightarrow TW$. Wskazaliśmy więc funktor $T\bullet : \text{Vect} \rightarrow \text{Alg}$.

Dowód. Niech $\tilde{f} = \iota \circ f : V \rightarrow TW$, gdzie $\iota : W \rightarrow TW$ jest inkluzją. Szukanym homomorfizmem jest $Tf = F(\tilde{f})$. $\square$

Twierdzenie 21. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$ a A algebrą nad $\mathbb{K}$. Niech $\iota : V \rightarrow SV$ będzie inkluzją. Dla dowolnego homomorfizmu przestrzeni wektorowych $f : V \rightarrow A$ takiego, że $f(v)f(w) = f(w)f(v)$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm algebr $F(f) = F : SV \rightarrow A$ taki, że $F \circ \iota = f$.

Dowód. Wiemy, że istnieje odpowiednie odwzorowanie $\tilde{F} : TV \rightarrow A$, a z założenia faktoryzuje się ono przez iloraz. $\square$

Uwaga. Niech ComAlg będzie kategorią algebr przemiennej. Mamy $SV \in \text{ComAlg}$. Z tego twierdzenia wynika, że jeśli A jest algebrą przemiennej, to odwzorowanie liniowe $f : V \rightarrow A$ rozszerza się do morfizmu algebr przemiennej $F : SV \rightarrow A$.

Twierdzenie 22. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$ a A algebrą nad $\mathbb{K}$. Niech $\iota : V \rightarrow \bigwedge V$ będzie inkluzją. Dla dowolnego homomorfizmu przestrzeni wektorowych $f : V \rightarrow A$ takiego, że $f(v)^2 = 0$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm algebr $F(f) = F : \bigwedge V \rightarrow A$ taki, że $F \circ \iota = f$.

Dowód. Wiemy, że istnieje odpowiednie odwzorowanie $\tilde{F} : TV \rightarrow A$, a z założenia faktoryzuje się ono przez iloraz. $\square$

Uwaga. Wskazaliśmy pewne funktory $S\bullet : \text{Vect} \rightarrow \text{Alg}$ i $\bigwedge\bullet : \text{Vect} \rightarrow \text{Alg}$.

Definicja 43. Algebra z gradacją R to algebra wraz z rozkładem na sumę prostą $R = \bigoplus_{i=0}^{\infty} R_i$ taką, że $\{R_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ są takimi algebrami, że $R_i + R_i \subseteq R_i$ oraz $R_m R_n \subseteq R_{m+n}$. Zazwyczaj zakładamy $R_0 = \mathbb{K}$ (inkluzja $\mathbb{K} \subseteq R_0$ wynika z definicji). Dla $r \in R$ przez $\deg r \in \mathbb{N}$ oznaczamy liczbę taką, że $r \in R_{\deg r}$.

Algebrę z gradacją R nazywamy przemiennej z dokładnością do gradacji (graded-commutative), gdy zachodzi $rs = (-1)^{\deg r \cdot \deg s} sr$ dla $r, s \in R$.

Uwaga. Algebry TV , SV i $\bigwedge V$ mają naturalne struktury algebr z gradacją.

Twierdzenie 23. Algebra z gradacją $\bigwedge V$ jest przemienna z dokładnością do gradacji.

Dowód. Weźmy elementy proste $\alpha = v_1 \wedge \dots \wedge v_p$ i $\beta = w_1 \wedge \dots \wedge w_q$. Mamy

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta &= v_1 \wedge \dots \wedge v_p \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_q = (-1)^p w_1 \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_p \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_q = \\ &= \dots = (-1)^{pq} w_1 \wedge \dots \wedge w_q \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_p = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha,\end{aligned}$$

gdzie równości wynikają z wielokrotnego zastosowania równości $v \wedge w = -w \wedge v$. $\square$

9. Geometria

2026-01-16

Definicja 44. Przestrzeń afiniczną nazywamy parę $(A, \vec{A})$, gdzie A jest zbiorem a $\vec{A}$ jest przestrzenią wektorową z działaniem $A \ni a \rightarrow a + v \in A$ dla $v \in \vec{A}$ a do tego dla każdego $a \in A$ odwzorowanie $\vec{A} \ni v \rightarrow a + v \in A$ jest bijekcją.

Notacja. Przestrzeń afiniczną wymiaru n nad $\mathbb{K}$ (wyznaczoną z dokładnością do izomorfizmu) oznaczamy $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$.

Definicja 45. Przestrzeń rzutowa $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ to zbiór $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$, gdzie $v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^* v = \lambda w$.

Twierdzenie 24. $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ parametryzuje proste w $\mathbb{K}^{n+1}$, to znaczy istnieje naturalna bijekcja między tymi zbiorami.

Dowód. Odwzorowanie $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \ni [v] \rightarrow \mathbb{K} \cdot v$ jest surjekcją, a jeśli $\mathbb{K} \cdot v = \mathbb{K} \cdot w$, to $v \sim w$. $\square$

Notacja (Współrzędne rzutowe). Punkt $[v] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ możemy rozpatrzyć w bazie $\mathbb{K}^{n+1}$ i zapisać jako $[v_0 : v_1 : \dots : v_n]$, gdzie $[v_0 : \dots : v_n] = [\lambda v_0 : \dots : \lambda v_n]$ dla $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Twierdzenie 25. Zachodzi $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \sqcup \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n-1} = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \sqcup \dots \sqcup \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^0$.

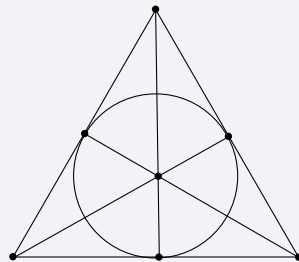
Dowód. Wystarczy udowodnić pierwszą równość, druga wynika z indukcji.

Dokonujemy podziału $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n = \{[v_0 : \dots : v_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n : v_n = 0\} \sqcup \{[v_0 : \dots : v_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n : v_n \neq 0\}$. Pierwszy zbiór jest izomorficzny z $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n-1}$, bo możemy zignorować ostatnią współrzędną. Możemy ustalić skalowania elementów drugiego zbioru tak, by ich ostatnia współrzędna wynosiła 1. Wtedy możemy je traktować jak n -krotki elementów $\mathbb{K}$ (nie zważając na relację równoważności, bo ustalamy reprezentanta, dla którego ostatnia współrzędna to 1). Takie krotki mają naturalną strukturę przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, gdzie dodawania wektorów polega na dodaniu do siebie kolejnych elementów w krotce. $\square$

Twierdzenie 26. Niech $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Wtedy przestrzeń $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ z topologią ilorazową jest zwarta.

Dowód. Dla każdego $v \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ istnieje $\tilde{v} \in \mathbb{K}^{n+1}$ takie, że $[v] = [\tilde{v}]$ i $\|\tilde{v}\| = 1$. Zatem rzutowanie $\mathbb{S}^n \ni v \rightarrow [v] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ jest ciągłą surjekcją. Ponieważ $\mathbb{S}^n$ jest zwarta, to $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ jest zwarta jako obraz przestrzeni zwartej w funkcji ciągłej. $\square$

Przykład. Płaszczyznę Fano nazywamy przestrzenią rzutową $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^2$. Wygląda ona jak na rysunku poniżej.



Definicja 46. Zbiorem miejsc zerowych wielomianu $f \in \mathbb{K}[T_1, \dots, T_n]$ w przestrzeni rzutowej nazywamy zbiór $\{x \in \mathbb{A}^n : f(x_1, \dots, x_n) = 0\}$. Oznaczamy go zazwyczaj $V(f)$. Zauważmy, że ustalenie środka układu współrzędnych $a \in \mathbb{A}^n$ zadaje izomorfizm $\mathbb{A}^n \simeq \mathbb{K}^n$, więc ma sens zapis $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Zbiory algebraiczne to zbiory postaci $V(f_1, \dots, f_k) = \{x \in \mathbb{A}^n : \forall_{i \in [k]} f_i(x_1, \dots, x_n) = 0\}$.

Dla $g \in \langle f_1, \dots, f_k \rangle$ (ideał generowany przez wielomiany) mamy $g(x) = 0$ dla $x \in V(f_1, \dots, f_k)$. Dla ideału $I \subseteq \mathbb{K}[T_1, \dots, T_n]$ definiujemy $V(I) = \{x \in \mathbb{A}^n : \forall_{f \in I} f(x) = 0\}$. Z kolei $V \subseteq \mathbb{A}^n$ zadaje ideał $I(V) = \{f \in \mathbb{K}[T_1, \dots, T_n] : \forall_{x \in V} f(x) = 0\}$.

Pomysł. Geometria algebraiczna bada zbiory algebraiczne poprzez badanie ideałów przez nie generowanych.

Przykład. Wielomian $x^2 + y^2 - 1$ definiuje zbiór $\{x \in \mathbb{A}^n : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, który nad $\mathbb{R}$ jest okręgiem.

Definicja 47. Zbiór algebraiczny, którego nie można zapisać jako (nietrywialną) sumę zbiorów algebraicznych nazywamy rozmaitością algebraiczną. Rozmaitości algebraiczne mogą być rozmaitościami topologicznymi (nazywamy je wtedy nieosobliwymi), ale nie muszą.

Definicja 48. Wielomian $f(T_0, \dots, T_n)$ nazywamy jednorodnym, jeśli jest postaci $f(T_0, \dots, T_n) = \sum_{a_0 + \dots + a_n = d} \alpha_{a_0, \dots, a_n} T_0^{a_0} \dots T_n^{a_n}$.

Propozycja 16. Dla wielomianu jednorodnego f mamy $f(\lambda T_0, \dots, \lambda T_n) = \lambda^d f(T_0, \dots, T_n)$. Zatem $f(\lambda T_0, \dots, \lambda T_n) = 0 \iff f(T_0, \dots, T_n) = 0$.

Definicja 49. Zbiór algebraiczny w $\mathbb{P}^n$ to zbiór postaci $\{x \in \mathbb{P}^n : \forall_{i \in [k]} f_i(x_0, \dots, x_n) = 0\}$, gdzie $f_1, \dots, f_k$ są wielomianami jednorodnymi.

Definicja 50. Pierścień $\mathbb{K}[T_0, \dots, T_n] = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathbb{K}[T_0, \dots, T_n]_d$ ma naturalną strukturę pierścienia z gradacją. Ideał $I \subseteq \mathbb{K}[T_0, \dots, T_n]$ nazywamy jednorodnym, gdy dla każdego $\sum_{d=0}^N f_d = f \in I$ mamy $f_d \in I$ dla wszystkich d .

Uwaga. Mamy zanurzenie $\mathbb{A}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ zadane przez $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow [1 : x_1 : \dots : x_n]$. Przekształca ono zbiór algebraiczny V zadany wielomianem f na zbiór algebraiczny powstały z f poprzez domnożenie składników f przez nową zmienną x_0 tak, by wynikowy wielomian był jednorodny.

Przykład. Okrąg $x^2 + y^2 = 1$ w $\mathbb{A}^2$ ma odpowiadający sobie zbiór $x^2 + y^2 = z^2$ w $\mathbb{P}^2$. Możemy ograniczyć ten zbiór do $\mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ zadanego przez $y = 1$. Otrzymujemy $x^2 + 1 = z^2$. Ten zbiór jest hiperbolą. Zatem zależnie od rozważanej podprzestrzeni ten sam zbiór może wyglądać różnie.

Definicja 51. Niech V będzie przestrzenią wektorową o wymiarze n . Rodzinę

$$\text{Gr}(n, k) = \{L \leq V : \dim L = k\}$$

nazywamy grassmanianem.

Uwaga. Chcemy w jakiś sposób sparametryzować $\text{Gr}(n, k)$. Dla $k = 1$ odpowiednią parametryzacją jest przestrzeń rzutową.

Ustalmy $L \in \text{Gr}(n, k)$. Niech $w_1, \dots, w_n$ będzie bazą L . Definiujemy odwzorowanie $\text{Gr}(n, k) \ni L \rightarrow [w_1 \wedge \dots \wedge w_k] \in \mathbb{P}(\bigwedge^k V)$. Zachodzi $\text{span}\{w_1, \dots, w_k\} = \text{span}\{w'_1, \dots, w'_k\} \iff w_1 \wedge \dots \wedge w_k = \lambda w'_1 \wedge \dots \wedge w'_k$ dla $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Zatem to odwzorowanie jest poprawnie określone i jest iniekcją.

Mając zadane $x = [w_1 \wedge \dots \wedge w_k] \in \mathbb{P}(\bigwedge^k V)$ chcemy zapisać ten punkt we współrzędnych rzu-

towych $[x_{i_1 \dots i_k} : x_{i'_1 \dots i'_n} : \dots]$. Możemy rozważyć macierz $W = \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_k \end{bmatrix}$ o wymiarach $n \times k$. Okazuje się, że $x_{i_1 \dots i_k}$ jest równy minorowi W na wierszach $i_1, \dots, i_k$.

W ten sposób możemy łatwo znajdować współrzędne punktów płaszczyzny rzutowej odpowiadające elementom grassmanianu. Tak wyznaczone współrzędne nazywamy współrzędnymi Plückera.

Twierdzenie 27 (Relacje Plückera). Dla $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} \leq n$ i $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{k+1} \leq n$ zachodzi $\sum_{t=1}^{k+1} (-1)^t x_{i_1 \dots i_{k-1} j_t} \cdot x_{j_1 \dots \hat{j}_t \dots j_{k+1}} = 0$, gdzie $\hat{j}_t$ oznacza pominięcie j_t , a w pierwszym czynniku musimy przesunąć j_t w odpowiednie miejsce (by ciąg był rosnący) i każde przesunięcie o jeden indeks zmienia znak.

Przykład. Dla $k = 2$, $n = 4$ oraz $j = (1, 3, 4)$, $i = 2$ mamy $x_{1,2}x_{3,4} + x_{2,3}x_{1,4} - x_{2,4}x_{1,3} = 0$.

Uwaga. Okazuje się, że zbiór algebraiczny zdefiniowany przez relacje Plückera jest dokładnie grassmanianem.