

ANALIZA MATEMATYCZNA 3

NOTATKI

„Tu nie ma co być ostrożnym. Brak ostrożności jeszcze nikogo nie zabił.”

Spis treści

1. Wstęp do analizy wielu zmiennych	2
2. Pochodne między przestrzeniami Banacha	3
3. Własności pochodnej	5
4. Różniczkowanie szczególnych odwzorowań	7
5. Pochodne kierunkowe	8
6. Pochodne cząstkowe	10
7. Zamiana ciała przy różniczkowaniu	12
8. Twierdzenie o przyrostach	13
9. Ciągi i szeregi funkcji różniczkowalnych	14
10. Pochodne cząstkowe a różniczkowalność	16
11. Dyfeomorfizmy	17
12. Funkcje uwikłane	19
13. Różniczki wyższych rzędów	21
14. Symetria różniczek	25
15. Własności odwzorowań wielokrotnie różniczkowalnych	26
16. Wzór Taylora	28
17. Wielomiany jednorodne i symetryczne	30
18. Szeregi Taylora	33
19. Ekstrema funkcji	34
20. Rozmaitości	36
21. Podrozmaitości	38
22. Immersje i submersje	40
23. Podrozmaitości przestrzeni euklidesowej	42
24. Podrozmaitości z brzegiem	43
25. Stożki styczne i normalne	44
26. Ekstrema warunkowe	46
27. Uzupełnienie	47

1. Wstęp do analizy wielu zmiennych

2025-10-02

Notacja. Przez (E, a) będziemy oznaczać dowolne otoczenie $a \in E$ w przestrzeni E .

Twierdzenie 1 (Oryginalne Darboux). Niech $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Niech $f = F'$ i $a < u < v < b$ oraz niech y_0 będzie ściśle pomiędzy $f(u)$ i $f(v)$. Istnieje $t_0 \in (u, v)$ takie, że $f(t_0) = y_0$.

Dowód. Rozważmy funkcję $g(t) = F(t) - ty_0$, która jest różniczkowalna i ma pochodną $g'(t) = f(t) - y_0$. Jest ona ciągła, więc osiąga kresy na $[u, v]$. Jeśli ekstremum lokalne jest w środku tego przedziału, to pochodna się zeruje i mamy to, co chcemy.

Założmy, że $f(u) < f(v)$. Mamy $g'(u) < 0$, $g'(v) > 0$. Z ilorazu różnicowego $g(t) < g(u)$ dla $t \in (u, u + \varepsilon)$ oraz $g(t) < g(v)$ dla $t \in (v - \varepsilon, v)$ przy pewnym małym ε . Zatem minimum lokalne jest w (u, v) . Dla $f(u) > f(v)$ analogiczny argument daje maksimum. $\square$

Uwaga. Funkcja f nie musi być ciągła, ale np. nie może mieć nieciągłości skokowych.

Propozycja 1. Niech E będzie przestrzenią Banacha nad $\mathbb{R}$, $a < b$ w $\mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow E$ będzie n -krotnie różniczkowalna (dla $n = 0$ chodzi o ciągłość, na końcach patrzymy na pochodne jednostronne). Istnieje $F : \mathbb{R} \rightarrow E$ taka, że $F^{(k)}|_{[a,b]} = f^{(k)}$ dla $k \in \{0, \dots, n\}$ oraz $F|_{\mathbb{R} \setminus [a,b]}$ jest analityczna.

Dowód. Ustalamy

$$F_a(t) = f(a) + f'_+(a)(t-a) + \frac{1}{2}f''_+(a)(t-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}_+(a)(t-a)^n$$

i tak rozszerzamy z lewej strony, z prawej analogicznie. Ta funkcja jest wielomianem i łatwo sprawdzić, że pochodne się zgadzają. $\square$

Uwaga. W przypadku wielu zmiennych jest dużo trudniej, bo zmienia się geometria dziedziny (nie mamy linii z dwoma końcami).

Uwaga. Przy definiowaniu pochodnych funkcji jednej zmiennej wykorzystywaliśmy strukturę ciała dziedziny (dzielenie). Dla funkcji wielu zmiennych będziemy potrzebowali innej definicji. Pochodna bada zachowanie funkcji w punkcie poprzez porównanie przyrostu wartości do przyrostu argumentu. W praktyce szukamy odwzorowania liniowego, które dobrze przybliża przyrost funkcji w punkcie.

Uwaga. Dla przestrzeni skończonego wymiaru $\mathbb{K}^m$ i funkcji $f : (\mathbb{K}^m, a) \rightarrow F$ mamy różniczkę w punkcie a $d_a f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, F)$. Po ustaleniu bazy kanonicznej $e_1, \dots, e_m$ mamy

$$d_a f(v) = d_a f\left(\sum_{i=1}^m v_i e_i\right) = \sum_{i=1}^m v_i d_a f(e_i) = \langle v, (d_a f(e_1), \dots, d_a f(e_m)) \rangle,$$

jeśli rozważamy $F = \mathbb{K}$ i standardowy iloczyn skalarny. Stosujemy notację $\text{grad } f(a) = \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\right) \in \mathbb{K}^m$ (gdzie $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = d_a f(e_i)$) i nazywamy taki wektor gradientem, a jego elementy pochodnymi cząstkowymi. W przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ niezerowy gradient wyznacza kierunek najszybszego wzrostu funkcji f w punkcie a .

Uwaga. Różniczkowanie $f : (\mathbb{K}^m, a) \rightarrow \mathbb{K}^n$ sprowadza się do różniczkowania jej składowych.

Uwaga. Łatwo pokazać, że $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t}$, co odpowiada pochodnej kierunkowej f w kierunku e_j , a więc pochodnej funkcji jednej zmiennej $(\mathbb{K}, 0) \ni t \rightarrow f(a + te_j)$ zwanej przekrojem f w kierunku e_j .

Uwaga. Istnienie różniczki implikuje istnienie pochodnych cząstkowych, ale implikacja w drugą stronę już nie zachodzi (choć pochodne cząstkowe dają jedynego możliwego kandydata na różniczkę, bo jest nim $L(v) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) v_j$).

Notacja. Dla odwzorowania liniowego L często zamiast $L(x)$ piszemy $L.x$ lub Lx .

Przykład. Niech $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, co jest równoważne istnieniu $a \in \mathbb{R}^n$ takiego, że $L(x) = \langle x, a \rangle$. Wtedy $\|L\|_f = \|a\|$, co wynika z nierówności Cauchy'ego-Schwarza, bo $|\langle x, a \rangle| \leq \|x\| \|a\|$, a podstawiając $x = \frac{a}{\|a\|}$ dostajemy $L(x) = \|x\| \|a\|$. Z pierwszego faktu wynika $\|L\|_f \leq \|a\|$, a z drugiego $\|L\|_f \geq \|a\|$.

2. Pochodne między przestrzeniami Banacha

2025-10-06

Twierdzenie 2 (Banach). Niech E, F będą przestrzeniami Banacha, $f : E \rightarrow F$ izomorfizmem liniowym i ciągłym. Wtedy $F \in \text{Isom}(E, F)$.

Uwaga. Dalej będziemy rozważać funkcje między przestrzeniami Banacha, mimo, że zupełność nie zawsze będzie potrzebna. Będziemy rozważać przestrzenie Banacha E, F nad $\mathbb{K}$, zbiór $A \subseteq E$, funkcję $f : A \rightarrow F$ i $a \in A$.

Definicja 1. Odwzorowanie f jest różniczkowalne w a , gdy $a \in \text{int } A$ oraz istnieje funkcja $L \in \mathcal{L}(E, F)$ taka, że

$$\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 (\|h\| < r \wedge a + h \in A) \implies (\|f(a+h) - f(a) - L(h)\| \leq \varepsilon \|h\|).$$

Warunek $a \in \text{int } A$ oznacza, że istnieją odpowiednie h . Odwzorowanie L nazywamy różniczką (Frécheta) funkcji f w punkcie a i oznaczamy ją na jeden ze sposobów $L = d_a f = f'(a) = D_a f = Df(a) = T_a f = \partial f(a)$.

Wartość różniczki na argumentie h oznaczamy $d_a f(h)$ lub $f'(a).h$.

Uwaga. Przy pochodnej Cantora zamiast ciągłości L żąda się ciągłości f . Te definicje są równoważne.

Propozycja 2. Jeśli różniczka istnieje, to jest wyznaczona jednoznacznie.

Dowód. Jeśli L_1, L_2 są różniczkami f w a , to

$$\|L_1.h - L_2.h\| \leq \|L_1.h - f(a+h) + f(a)\| + \|-L_2.h + f(a+h) - f(a)\| \leq 2\varepsilon \|h\|,$$

gdzie nierówności zachodzą dla $\|h\| \leq r$ dla pewnego r .

Dla $x \in E \setminus \{0\}$ i $h = r \frac{x}{\|x\|}$ mamy $\|(L_1 - L_2) \cdot \left(r \frac{x}{\|x\|}\right)\| \leq 2\varepsilon \left\|r \frac{x}{\|x\|}\right\|$, czyli $\|(L_1 - L_2).x\| \leq 2\varepsilon \|x\|$, skąd $L_1 = L_2$. $\square$

Propozycja 3. Jeśli f jest różniczkowalna w a , to jest ciągła w a .

Dowód.

$$\|f(x) - f(a) \pm d_a f(x-a)\| \leq \varepsilon \|x-a\| + \|d_a f(x-a)\| \leq \varepsilon \|x-a\| + \|d_a f\| \|x-a\|.$$

 $\square$

Propozycja 4. Różniczkowalność i postać różniczki nie zależy od wyboru normy – możemy ją zastąpić przez dowolną normę równoważną.

Definicja 2 (Notacja Bachmanna-Landaua). Rozważmy przestrzeń topologiczną (X, τ) i punkt $a \in X$ (dla ustalenia uwagi). Niech F, G będą przestrzeniami unormowanymi (być może nad różnymi ciałami) i $A, B \subseteq X$ oraz $a \in \text{int}(A \cap B)$, $f \in F^A, g \in G^B$.

Piszemy $f = O(g)$ (f jest O duże od g w punkcie a), jeśli

$$\exists M > 0 \exists \tau \ni U \ni a : U \subseteq A \cap B \quad \forall x \in U \quad \|f(x)\| \leq M \|g(x)\|.$$

Piszemy $f = o(g)$ (f jest o małe od g w punkcie a), jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tau \ni U \ni a : U \subseteq A \cap B \quad \forall x \in U \quad \|f(x)\| \leq \varepsilon \|g(x)\|.$$

Uwaga. Jeśli $f = o(g)$, to musi być $f(a) = 0$.

Propozycja 5.

$$f = o(g) \iff \exists \xi : A \cap B \rightarrow F \quad \xi(a) = 0, f(x) = \|g(x)\| \xi(x) \text{ oraz } \xi \text{ jest ciągłe w } a.$$

Dowód. ($\implies$) Definiujemy

$$\xi(x) = \begin{cases} 0, & x = a \vee g(x) = 0 \\ \frac{f(x)}{\|g(x)\|}, & g(x) \neq 0 \end{cases}.$$

($\impliedby$) Z definicji ciągłości. □

Definicja 3. $f_i \in F^{A_i} : i = 1, 2, g \in G^B, a \in \text{int}(A_1 \cap A_2 \cap B)$. Wtedy $f_1 - f_2$ jest dobrze określona na $A_1 \cap A_2 = A$. Piszemy $f_2 = f_1 + O(g)$, jeśli $f_2 - f_1 = O(g)$ i analogicznie dla o .

Uwaga. W badaniu różniczkowalności rozważamy translacje w E , a te są homeomorfizmami, więc $a \in \text{int} A \implies 0 \in \text{int}(A - a)$ i funkcja $h \rightarrow f(a + h)$ jest dobrze określona dla $A - a$.

Warunek z definicji różniczkowalności można zapisać jako

$$f(a + h) - f(a) - L.h = o(h) \text{ (w zerze)}.$$

Definicja 4. Niech $f \in F^A, g \in F^B, A, B \subseteq E$. f i g są styczne w a ($f \sim_a g$), jeśli $a \in \text{int}(A \cap B)$ i

$$\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 (\|x - a\| < r, x \in A \cap B) \implies (\|f(x) - g(x)\| \leq \varepsilon \|x - a\|),$$

czyli $(f - g)(x) = o(x - a)$.

Propozycja 6. Różniczkowalność f z różniczką L jest równoważna obu z następujących warunków:

1. $f \sim_a (E \ni x \rightarrow L(x - a) + f(a) \in F)$.
2. $L \sim_0 ((A - a) \ni h \rightarrow f(a + h) - f(a) \in F)$.

Propozycja 7. 1. $\sim_a$ jest relacją równoważności na zbiorze $\{f : A \rightarrow F \mid a \in \text{int} A\}$.

2. $f \sim_a g \implies f(a) = g(a)$.
3. $f \sim_a g \implies (f \text{ ciągła w } a \iff g \text{ ciągła w } a)$.
4. f, g liniowe i $f \sim_a g \implies f = g$.
5. Styczność nie zmienia się po zamianie normy na równoważną.

Lemat 1. Różniczkowalność jest równoważna istnieniu:

1. $\xi : A - a \rightarrow F$ takiego, że $\xi(0) = 0$, ξ ciągłe w 0 oraz dla $h \in A - a$ jest $f(a + h) =$

$$f(a) + L.h + \xi(h) \|h\|.$$

2. $\eta : A \rightarrow F$ takiego, że $\eta(a) = 0$, η ciągłe w a oraz dla $x \in A$ jest $f(x) = f(a) + L.(x-a) + \eta(x) \|x-a\|$.

Przykład. 1. $f : A \rightarrow F$ stałe ma $d_a f = 0$.

2. Dla $L \in \mathcal{L}(E, F)$ i $f = L|_A$ jest $d_a f = L$.

3. Dla $E = \mathbb{K}$ f jest różniczkowalne w a z $d_a f \cdot \lambda = \lambda v$ dla pewnego $v \in F$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = v$.

Uwaga. Mamy izometrię $\mathcal{L}(\mathbb{K}, F) \simeq F$ zadaną poprzez $F \ni v \rightarrow (\mathbb{K} \ni \lambda \rightarrow \lambda v \in F) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}, F)$. Daje nam ona zgodność rachunku różniczkowego budowanego teraz z tym zbudowanym już wcześniej.

Definicja 5. Definiujemy $A^{(1)} = \{a \in A \mid f \text{ różniczkowalna w } a\} \subseteq \text{int } A$. Odwzorowanie $f' : A^{(1)} \ni x \rightarrow d_x f \in \mathcal{L}(E, F)$ nazywamy odwzorowaniem pochodnym lub po prostu pochodną.

f jest różniczkowalne, jeśli jest różniczkowalne w każdym punkcie swojej dziedziny, czyli $A^{(1)} = A$ (wtedy A musi być otwarty).

Definicja 6. Odwzorowanie f jest klasy $\mathcal{C}^1$, jeśli jest różniczkowalne i odwzorowanie pochodne jest ciągłe.

Przykład. 1. $A \in \text{top}(E)$, $F : A \rightarrow F$ stałe jest klasy $\mathcal{C}^1$ i $f' \equiv 0 \in \mathcal{L}(E, F)$.

2. $L \in \mathcal{L}(E, F)$, $A \in \text{top}(E)$, $f = L|_A$ jest klasy $\mathcal{C}^1$ i $f' \equiv L$, czyli $f'(x) = L$ dla każdego x .

3. Dla $E = \mathbb{K}$ mamy $f'(a) \in F$ zdefiniowane jako granica ilorazu różnicowego. W nowej definicji mamy $f' : A \ni a \rightarrow (\mathbb{K} \ni \lambda \rightarrow \lambda f'(a) \in F) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}, F)$, co można utożsamić z $f' : A \ni a \rightarrow f'(a) \in F$.

Propozycja 8. 1. Jeśli zacieśniamy f do B takiego, że $a \in \text{int } B$, to $d_a f = d_a (f|_B)$.

2. Zacieśnianie funkcji klasy $\mathcal{C}^1$ na zbiór otwarty daje funkcję klasy $\mathcal{C}^1$.

Uwaga. Przy rozważaniu różniczkowalności $f : A \rightarrow F$ rozważamy $f|_{\text{int } A}$. Różniczkowalność w punkcie jest własnością lokalną, zależną tylko od kielka funkcji w punkcie (klasy równoważności funkcji, które są równe w pewnym otoczeniu punktu).

3. Własności pochodnej

2025-10-09

Twierdzenie 3. Mamy przestrzenie Banacha E, F, G nad $\mathbb{K}$ oraz zbiory $A \subseteq E, B \subseteq F$ i funkcje $f : A \rightarrow F$ różniczkowalną w a oraz $g : B \rightarrow G$ różniczkowalną w $b = f(a)$ takie, że $f(A) \subseteq B$. W takiej sytuacji $g \circ f$ jest różniczkowalne w a oraz $d_a (g \circ f) = d_{f(a)} g \circ d_a f$.

Dowód. Mamy $a \in \text{int } A$, $f(x) = f(a) + d_a f(x-a) + \eta(x) \|x-a\|$, gdzie $\eta : A \rightarrow F$ jest ciągła w a i $\eta(a) = 0$.

Podobnie $b \in \text{int } B$, $g(y) = g(b) + d_b g(y-b) + \xi(y) \|y-b\|$ dla odpowiedniego ξ .

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + d_{f(a)} g(f(x) - f(a)) + \xi(f(x)) \|f(x) - f(a)\| = \\ &= (g \circ f)(a) + d_{f(a)} g(d_a f(x-a) + \eta(x) \|x-a\|) + \xi(f(x)) \|d_a f(x-a) + \eta(x) \|x-a\|\| = \\ &= (g \circ f)(a) + (d_{f(a)} g \circ d_a f)(x-a) \\ &\quad + d_{f(a)} g(\eta(x)) \|x-a\| + \xi(f(x)) \|d_a f(x-a) + \eta(x) \|x-a\|\|. \end{aligned}$$

Szacujemy dwa ostatnie składniki:

$$\begin{aligned} & \|d_{f(a)} g(\eta(x)) \|x - a\| + \xi(f(x)) \|d_a f(x - a) + \eta(x) \|x - a\|\| \leq \\ & (\|d_{f(a)} g\| \|\eta(x)\| + \|\xi(f(x))\| (\|d_a f\| + \|\eta(x)\|)) \|x - a\|. \end{aligned}$$

Składniki w nawiasie dążą do 0 gdy $x \rightarrow a$, więc mamy to, co chcemy. $\square$

Twierdzenie 4. Mamy przestrzenie Banacha E, F, G nad $\mathbb{K}$ oraz zbiory $A \subseteq E, B \subseteq F$ otwarte i funkcje $f : A \rightarrow F, g : B \rightarrow G$ klasy $\mathcal{C}^1$ takie, że $f(A) \subseteq B$. W takiej sytuacji $g \circ f$ jest klasy $\mathcal{C}^1$.

Dowód. Wiemy, że $(g \circ f)' : A \ni x \rightarrow d_{f(x)} g \circ d_x f \in \mathcal{L}(E, G)$. Ta funkcja jest ciągiem złożień $x \rightarrow (d_x f, f(x)) \rightarrow (d_x f, d_{f(x)} g) \rightarrow d_{f(x)} g \circ d_x f$. Najpierw robimy zestawienie funkcji ciągłych f' i f , które jest ciągle, potem stosujemy ciągłą funkcję g' , a na końcu składamy te funkcje. Wszystkie te operacje zachowują ciągłość. $\square$

Twierdzenie 5. Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $A \subseteq E$, $f_i : A \rightarrow F$ dla $i \in \{1, \dots, m\}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$. Jeśli $f_1, \dots, f_m$ są różniczkowalne w $a \in A$, to $\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i$ jest różniczkowalne w a oraz $d_a (\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i d_a f_i$. Jeśli te funkcje są klasy $\mathcal{C}^1$, to ich kombinacja liniowa też.

Dowód. Mamy $f_i(x) = f_i(a) + d_a f_i(x - a) + \|x - a\| \eta_i(x)$, przemnażamy przez α_i , sumujemy i mamy.

Mamy $(\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i)' = \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i'$, co jest ciągle, gdy f_i' są ciągłe, więc mamy klasę $\mathcal{C}^1$. $\square$

Twierdzenie 6. Niech $E, F_1, \dots, F_m$ będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $m \geq 2$, $A \subseteq E$. Niech $F = F_1 \times \dots \times F_m$, $f = (f_1, \dots, f_m) : A \rightarrow F$. W takiej sytuacji f jest różniczkowalne w a wtedy i tylko wtedy, gdy $f_1, \dots, f_m$ są różniczkowalne w a . Wówczas $d_a f = (d_a f_1, \dots, d_a f_m)$. Dodatkowo analogiczna równoważność zachodzi dla bycia klasy $\mathcal{C}^1$.

Dowód. Niech $p_i : F \rightarrow F_i$ będzie rzutowaniem, a $v_i : F_i \rightarrow F$ zanurzeniem. Są one klasy $\mathcal{C}^1$ i liniowe.

($\Rightarrow$) Mamy $f_i = p_i \circ f$, więc mamy tezę z różniczkowalności p_i .

($\Leftarrow$) Mamy $f = \sum_{i=1}^m v_i \circ f_i$, teza wynika z różniczkowalności v_i i twierdzeń o złożeniach i kombinacjach liniowych. Z nich również mamy

$$d_a f = \sum_{i=1}^m d_a (v_i \circ f_i) = \sum_{i=1}^m d_{f_i(a)} v_i \circ d_a f_i = \sum_{i=1}^m v_i \circ d_a f_i = (d_a f_i)_{i \in [m]},$$

bo v_i jest liniowe, więc jest swoją różniczką.

Własność z klasą $\mathcal{C}^1$ wynika z klasy $\mathcal{C}^1$ rzutowań i zanurzeń, bo dla $\varphi_i : \mathcal{L}(E, F_i) \ni l \rightarrow v_i \circ l \in \mathcal{L}(E, F_1 \times \dots \times F_m)$ mamy $f' = \sum_{i=1}^m \varphi_i \circ f_i'$. $\square$

Uwaga. W powyższym twierdzeniu dostajemy równość $f'(a) = (f'_1(a), \dots, f'_m(a))$, ale nie ma sensu zapis $f' = (f'_1, \dots, f'_m)$, bo te odwzorowania mają inne typy.

Twierdzenie 7. Niech $E_1, \dots, E_m, F_1, \dots, F_m$ dla $m \geq 2$ będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $A_i \subseteq E_i$ dla każdego i . Niech $f_i : A_i \rightarrow F_i$, $a = (a_1, \dots, a_m) \in A_1 \times \dots \times A_m$ oraz niech $E = E_1 \times \dots \times E_m$, $F = F_1 \times \dots \times F_m$, $f = f_1 \times \dots \times f_m$. W takiej sytuacji f jest różniczkowalne w a wtedy i tylko wtedy, gdy $f_1, \dots, f_m$ są różniczkowalne w a_i . Wówczas $d_a f = d_a f_1 \times \dots \times d_a f_m$. Dodatkowo analogiczna równoważność zachodzi dla bycia klasy $\mathcal{C}^1$.

Dowód. Niech p_i, q_i będą rzutowaniami odpowiednio z E i F , a u_i, v_i zanurzeniami.

($\Rightarrow$) Z różniczkowalności f w punkcie a mamy $a \in \text{int } A$, więc $a_i \in \text{int } A_i$. Kładziemy $\tilde{a}_i = (a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_m)$ i mamy $f_i = q_i \circ f \circ (\tilde{a}_i + u_i|_{A_i})$. Twierdzenie o złożeniu kończy dowód.

($\Leftarrow$) Mamy $a_i \in \text{int } A_i$ dla każdego i , więc $a \in \text{int } A$. Zapisujemy $f = \sum_{i=1}^m v_i \circ f_i \circ p_i|_A$. Z tego

wynika różniczkowalność i postać różniczki:

$$\begin{aligned} d_a f &= \sum_{i=1}^m d_a (v_i \circ f_i \circ p_i|_A) = \sum_{i=1}^m d_{f_i(a_i)} v_i \circ d_{a_i} f_i \circ d_a (p_i|_A) = \sum_{i=1}^m v_i \circ d_{a_i} f_i \circ p_i \\ &= d_{a_1} f_1 \times \dots \times d_{a_m} f_m. \end{aligned}$$

□

4. Różniczkowanie szczególnych odwzorowań

2025-10-09

Twierdzenie 8. Niech E_1, E_2, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$ i niech $\Phi \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2; F)$. Dla $(a_1, a_2), (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$ funkcja Φ jest różniczkowalna w (a_1, a_2) oraz $d_{(a_1, a_2)} \Phi \cdot (h_1, h_2) = \Phi(a_1, h_2) + \Phi(h_1, a_2)$. Funkcja Φ jest też klasy $\mathcal{C}^1$.

Dowód.

$$\begin{aligned} \|\Phi(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - \Phi(a_1, a_2) - \Phi(a_1, h_2) - \Phi(h_1, a_2)\| &= \|\Phi(h_1, h_2)\| \leq \|\Phi\| \|h_1\| \|h_2\| \\ &\leq \|\Phi\| (\|h_1\| + \|h_2\|)^2, \end{aligned}$$

gdzie pierwsze przejście to rozpisanie pierwszego wyrazu z dwuliniowości. Pochodna Φ' jest sumą dwóch odwzorowań liniowych:

$$\begin{aligned} L_1 : E_1 \times E_2 \ni (a_1, a_2) &\rightarrow ((h_1, h_2) \rightarrow \Phi(a_1, h_2)) \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2, F), \\ L_2 : E_1 \times E_2 \ni (a_1, a_2) &\rightarrow ((h_1, h_2) \rightarrow \Phi(h_1, a_2)) \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2, F). \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić ich ciągłość, np. $\|L_1(a_1, a_2)\| = \sup_{\|(h_1, h_2)\|=1} \|\Phi(a_1, h_2)\| \leq \|\Phi\| (\|a_1\| + \|a_2\|)$. Zatem Φ' jest ciągłe, czyli Φ jest klasy $\mathcal{C}^1$. □

Uwaga. Zauważmy, że w powyższym twierdzeniu Φ jest dwuliniowe, a jego różniczka jest liniowa ze względu na całą parę argumentów.

Twierdzenie 9. Niech E, E_1, E_2, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$. Niech $A \subseteq E$ i $f : A \rightarrow E_1, g : A \rightarrow E_2, \Phi \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2; F)$, $\varphi(x) = \Phi(f(x), g(x))$ dla $x \in A$. Jeśli f i g są różniczkowalne w $a \in A$, to φ również oraz $d_a \varphi \cdot h = \Phi(f(a), d_a g \cdot h) + \Phi(d_a f \cdot h, g(a))$. To samo zachodzi dla bycia klasy $\mathcal{C}^1$.

Dowód. $\varphi = \Phi \circ (f, g)$, skąd wynika teza na podstawie twierdzenia o zestawianiu, odwzorowaniu dwuliniowym i składaniu. Pozostaje przeliczyć:

$$d_a \varphi \cdot h = d_{(f(a), g(a))} \Phi \circ (d_a f, d_a g) \cdot h = \Phi(f(a), d_a g \cdot h) + \Phi(d_a f \cdot h, g(a)).$$

□

Uwaga. Jeśli $E = E_1 = E_2 = F = \mathbb{K}$, a $\Phi(x, y) = xy$ jest mnożeniem, to mamy $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Twierdzenie 10. Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką 1_A , niekoniecznie przemianą. Przez $G(A)$ oznaczamy grupę elementów odwracalnych w A . Rozważamy odwzorowanie $\xi : G(A) \ni x \rightarrow x^{-1} \in G(A)$, które jest homeomorfizmem. W powyższej sytuacji ξ jest klasy $\mathcal{C}^1$, dla $a \in G(A), h \in A$ mamy $d_a \xi \cdot h = -a^{-1} \cdot h \cdot a^{-1}$.

Dowód. Zakładamy, że $A \neq \{0\}$. Odwzorowanie $h \rightarrow -a^{-1} \cdot h \cdot a^{-1}$ jest liniowe, ciągłość mamy z $\| -a^{-1} h a^{-1} \| \leq \|a^{-1}\|^2 \|h\|$. Wiemy, że dla $a \in G(A)$ mamy $K\left(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|}\right) \subseteq G(A)$, więc dla

$h \in A : \|h\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$ mamy $a + h \in G(A)$ i

$$\begin{aligned} \|\xi(a+h) - \xi(a) + a^{-1}ha^{-1}\| &= \|(a+h)^{-1}(1_A - (a+h)a^{-1}) + a^{-1}ha^{-1}\| = \\ &= \|(a+h)^{-1}ha^{-1} + a^{-1}ha^{-1}\| = \|(a^{-1} - (a+h)^{-1})ha^{-1}\| = \|(\xi(a) - \xi(a+h))ha^{-1}\| \leq \\ &\leq \|\xi(a) - \xi(a+h)\| \|h\| \|a^{-1}\|. \end{aligned}$$

Z ciągłości ξ to wyrażenie jest odpowiednio ograniczone. Rozważmy odwzorowanie dwuliniowe i ciągłe $\Phi : A \times A \ni (x, y) \rightarrow (A \ni h \rightarrow xhy) \in \mathcal{L}(A, A)$, gdzie ciągłość wynika z $\|\Phi(x, y)\| \leq \|x\| \|y\|$. Mamy $\xi' = \Phi \circ (-\xi, \xi)$, skąd wynika ciągłość ξ' . $\square$

Twierdzenie 11. Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$ takimi, że $\text{Isom}(E, F) \neq \emptyset$. Niech $\eta : \text{Isom}(E, F) \ni g \rightarrow g^{-1} \in \text{Isom}(F, E)$. W takiej sytuacji η jest klasy $\mathcal{C}^1$ oraz dla $g \in \text{Isom}(E, F)$, $h \in \mathcal{L}(E, F)$ mamy $d_g \eta \cdot h = -g^{-1} \circ h \circ g^{-1}$.

Dowód. Ustalmy $\varphi \in \text{Isom}(F, E)$ i oznaczmy $\varphi_* : \mathcal{L}(E, F) \ni L \rightarrow L \circ \varphi \in \mathcal{L}(F, F)$ oraz $\varphi^* : \mathcal{L}(F, F) \ni L \rightarrow \varphi \circ L \in \mathcal{L}(F, E)$. Oba te odwzorowania są liniowe i ciągłe (ciągłość z $\|\varphi_*(L)\| = \|L \circ \varphi\| \leq \|L\| \|\varphi\|$ i analogicznie dla φ^*), a więc są klasy $\mathcal{C}^1$.

Mamy $\eta = \varphi^* \circ \xi \circ \varphi_*|_{\text{Isom}(E, F)}$, co jest złożeniem odwzorowań klasy $\mathcal{C}^1$. Liczymy:

$$\begin{aligned} d_g \eta \cdot h &= d_{\xi(\varphi_*(g))} \varphi^* \circ d_{\varphi_*(g)} \xi \circ d_g (\varphi_*|_{\text{Isom}(E, F)}) \cdot h = \varphi^* (d_{g \circ \varphi} \xi (\varphi_*(h))) = \\ &= \varphi \circ \left(- (g \circ \varphi)^{-1} \circ \varphi_*(h) \circ (g \circ \varphi)^{-1} \right) = -g^{-1} \circ h \circ g^{-1}. \end{aligned}$$

$\square$

Uwaga. Zbiór $\text{Isom}(E, F)$ nie jest przestrzenią wektorową, zatem $d_g \eta$ jest odwzorowaniem między nadprzestrzeniami $\mathcal{L}(E, F)$ i $\mathcal{L}(F, E)$ i dlatego $h \in \mathcal{L}(E, F)$ nie musi być izomorfizmem.

Przykład. 1. Dla $A = \mathbb{K}$ jest $\xi : \mathbb{K} \setminus \{0\} \ni z \rightarrow \frac{1}{z} \in \mathbb{K}$, jest $\xi'(z) \cdot w = -\frac{1}{z^2} w \frac{1}{z} = -\frac{w}{z^2}$.

2. Dla A będącego przemienną algebrą Banacha mamy funkcję $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$. Zachodzi $\exp'(a) \cdot h = \exp(a) \cdot h$.

Dowód.

$$\begin{aligned} \|\exp(a+h) - \exp(a) - \exp(a) \cdot h\| &= \|\exp(a) \exp(h) - \exp(a) - \exp(a) \cdot h\| \leq \\ \|\exp(a)\| \|\exp(h) - 1_A - h\| &\leq \|\exp(a)\| \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} h^{n-2} \right\| \|h\|^2 \leq \|\exp(a)\| \|h\|^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \|h\|^{n-2} \leq \\ e \|\exp(a)\| \|h\|^2, \end{aligned}$$

gdzie ostatnia nierówność zachodzi dla $\|h\| < 1$.

5. Pochodne kierunkowe

2025-10-13

Definicja 7. Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $A \subseteq E$, $a \in A$, $f : A \rightarrow F$. Ustalamy wektor (kierunek) $v \in E \setminus \{0\}$. Przekrojem zbioru A w punkcie a w kierunku v nazywamy zbiór $A_{a,v} = \{t \in \mathbb{K} : a + tv \in A\}$. Przekrojem funkcji f w punkcie a w kierunku v nazywamy funkcję $f_{a,v} : A_{a,v} \ni t \rightarrow f(a + tv) \in F$.

Definicja 8. Jeśli $0 \in \text{int } A_{a,v}$ oraz istnieje $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \in F$, to granicę tę będziemy nazywać pochodną kierunkową f w a w kierunku v i oznaczać $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ lub $f'_v(a)$.

Jest jasne, że $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = f'_{a,v}(0) = \frac{d}{dt}(t \rightarrow f(a + tv))|_{t=0}$.

Propozycja 9. Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $A \subseteq E$, $f : A \rightarrow F$, $a \in A$, $v \in E \setminus \{0\}$. Zakładamy, że f jest różniczkowalna w a . W takiej sytuacji istnieje $f'_v(a)$ oraz $f'_v(a) = d_a f \cdot v$.

Dowód. Z $a \in \text{int } A$ mamy $0 \in \text{int } A_{a,v}$. Mamy $f_{a,v} = f(\tau(t))$, gdzie $\tau(t) = a + tv$ jest odwzorowaniem afinicznym, dla którego zachodzi $d_t \tau \cdot h = vh$. Z twierdzenia o różniczkowaniu złożenia jest $d_0 f_{a,v} \cdot h = d_a f \circ d_0 \tau \cdot h = d_a f(vh) = d_a f(v)h$. Zatem $f'_v(a) = d_a f(v)$. $\square$

Uwaga. Założyliśmy $v \neq 0$, ale definicje dają nam $A_{a,0} = \mathbb{K}$, $f_{a,0} \equiv f(a)$ i zachodzi $f'_0(a) = 0 = d_a f \cdot 0$, więc powyższe twierdzenie zachodzi dla $v = 0$.

Uwaga. Jeśli pochodna kierunkowa $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ istnieje, to dla każdego $\lambda \in \mathbb{K}$ mamy $\frac{\partial f}{\partial \lambda v}(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial v}(a)$, bo $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t\lambda v) - f(a)}{t} = \lambda \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+(t\lambda)v) - f(a)}{t\lambda}$. Zatem pochodne kierunkowe wystarczy rozważać dla $v \in \mathbb{S}_E$ – na sferze jednostkowej.

Uwaga. Z istnienie wszystkich pochodnych kierunkowych nie wynika nawet ciągłość funkcji. Niech $C = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ i $f = \chi_{C, \mathbb{R}^2} - \chi_{\{(0,0)\}, \mathbb{R}^2}$. Ta funkcja przyjmuje wartość 1 na paraboli bez $(0,0)$, a poza tym 0. Rozważamy pochodne kierunkowe w $(0,0)$. W każdym kierunku v mamy $f_{(0,0),v} \equiv 0$ w otoczeniu $(0,0)$ (prosta przecina się z parabolą tylko w jednym punkcie), a nie mamy ciągłości – można zejść do $(0,0)$ po paraboli, gdzie $f(x) = 1$.

Definicja 9. Jeśli dla każdego $v \in E$ istnieje $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ oraz istnieje $L \in \mathcal{L}(E, F)$ takie, że $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = L(v)$, to mówimy, że f jest różniczkowalne w sensie Gâteaux w a , a odwzorowanie L (oznaczane $\delta_a f$) nazywamy jego różniczką Gâteaux (słabą różniczką). Nie żądamy $a \in \text{int } A$, wystarczy nam $0 \in \text{int } A_{a,v}$ dla każdego v .

Propozycja 10. 1. $\delta_a f$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $L \in \mathcal{L}(E, F)$ takie, że dla każdego $v \in \mathbb{S}_E$ mamy $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = L(v)$. W takiej sytuacji $\delta_a f = L$.
2. $d_a f$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $L \in \mathcal{L}(E, F)$ takie, że dla każdego $v \in \mathbb{S}_E$ mamy $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = L(v)$ oraz ta granica jest jednostajna ze względu na v . W takiej sytuacji $d_a f = L$.

Dowód. Pierwszy punkt: w prawo oczywiste, w drugą stronę bierzemy kierunek $w \neq 0$ i rozważamy $v = \frac{w}{\|w\|} \in \mathbb{S}_E$. Wtedy $\frac{\partial f}{\partial w}(a) = \|w\| \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \|w\| L(v) = L(w)$.

Drugi punkt: jednostajność granicy to $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall v \in \mathbb{S}_E \ |t| < \delta \implies \left\| \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} - L(v) \right\| \leq \varepsilon$. Dla $\|h\| < \delta$ biorąc $v = \frac{h}{\|h\|}$ i $t = \|h\|$ mamy $\|f(a+h) - f(a) - L(h)\| \leq \varepsilon \|h\|$. W drugą stronę dla $v \in \mathbb{S}_E$ i $\|tv\| < \delta$ mamy $\|f(a+tv) - f(a) - L(tv)\| \leq \varepsilon \|tv\| = \varepsilon |t|$, czyli $\left\| \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} - L(v) \right\| \leq \varepsilon$. $\square$

Uwaga. W $\mathbb{K}^m$ mamy kierunki bazy kanonicznej $e_1, \dots, e_m$, więc dla $E = \mathbb{K}^m$ piszemy $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(a)$ i nazywamy ten napis i -tą pochodną cząstkową. Jeśli istnieje $d_a f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, F)$, to jest ona wyznaczona przez wartości na bazie, czyli $d_a f(h_1, \dots, h_m) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$.

Dla $F = \mathbb{K}$ ma to szczególny sens, bo wtedy $d_a f$ jest kombinacją liniową rzutowań, które są bazą $\mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}) = (\mathbb{K}^m)^*$. Oznaczamy wtedy rzutowanie p_i jako dx_i i wtedy $df = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ jest odwzorowaniem pochodnym.

Dla $F = \mathbb{K}$ funkcję $d_a f$ można utożsamić z wektorem pochodnych cząstkowych $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right)_{i=1}^m \in \mathbb{K}^m$ zwanym gradientem f i oznaczanym $\nabla f(a)$ lub $\text{grad } f$.

Propozycja 11. Dla funkcji różniczkowalnej $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ w otwartym $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ jeśli $\nabla f(a) \neq 0$, to kierunek $\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|} \in \mathbb{S}^{m-1}$ jest kierunkiem największego wzrostu funkcji f w punkcie $a \in \Omega$.

Dowód. Szukamy $v \in \mathbb{S}^{m-1}$ maksymalizującego infinitesimalny przyrost $\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$, czyli dającego wartość $\max_{\|v\|=1} \frac{\partial f}{\partial v}(a)$. Mamy $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = d_a f(v) = \langle \nabla f(a), v \rangle \leq \|\nabla f(a)\| \|v\| = \|\nabla f(a)\|$. Maksimum jest osiągnięte dla $v_0 = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$. $\square$

Uwaga. Gdy $E = \mathbb{K}^n$, $F = \mathbb{K}^m$ i $f = (f_1, \dots, f_m)$ jest różniczkowalna w a , to $d_a f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ utożsamiamy z macierzą z $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ zwaną macierzą Jacobiego f w a , będącą macierzą pochodnych cząstkowych (różniczka jest zestawieniem różniczek, które są wektorami).

$$d_a f = \begin{bmatrix} d_a f(e_1) & \dots & d_a f(e_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(a)^T \\ \nabla f_2(a)^T \\ \vdots \\ \nabla f_m(a)^T \end{bmatrix}.$$

Mamy $d_a f \cdot h = (d_a f_i(h))_{i=1}^m \in \mathbb{K}^m$, co jest równe mnożeniu macierzy: $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right]_{i \in [m], j \in [n]} \cdot h$.

Gdy $m = n$, to wyznacznik uzyskanej macierzy kwadratowej nazywamy jacobianem f w a i oznaczamy go $\text{Jac } f(a) = \det d_a f$.

6. Pochodne cząstkowe

2025-10-16

Definicja 10. Niech $E_1, \dots, E_m, F$ ($m \geq 2$) będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $A \subseteq E_1 \times \dots \times E_m$, $a = (a_1, \dots, a_m) \in A$. Przez $u_i : E_i \rightarrow E_1 \times \dots \times E_m$ rozumiemy zanurzenie kanoniczne. Oznaczamy $\tilde{a}_i = (a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_m)$ i $\tilde{u}_i = u_i + \tilde{a}_i$. Niech

$$A_i = \tilde{u}_i^{-1}(A) = \{x_i \in E_i : (a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_m) \in A\}.$$

Do tego $\lambda_i = \tilde{u}_i|_{A_i}$ oraz ${}^i f = f \circ \lambda_i : A_i \rightarrow F$.

Funkcję ${}^i f$ nazywamy i -tym odwzorowaniem częściowym f w a . i -tą różniczką cząstkową f w a nazywamy (o ile istnieje) różniczkę ${}^i f$ w punkcie a_i i oznaczamy ją $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathcal{L}(E_i, F)$.

Uwaga. Gdy $E_i = \mathbb{K}$, to ${}^i f'(a_i)$ utożsamia się z ${}^i f'(a_i) \cdot 1 \in F$, czyli otrzymujemy pochodną cząstkową (kierunkową w kierunku e_i).

Uwaga. W definicji różniczki cząstkowej nie potrzebujemy $a \in \text{int } A$, wystarczy $a_i \in \text{int } A_i$. Na przykład $f(x, y) = \begin{cases} x, & y = 0 \\ y^2, & x = 0 \end{cases}$ zdefiniowane na $A = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 : xy = 0\}$ ma pochodne cząstkowe w zerze $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Twierdzenie 12. Niech $E_1, \dots, E_m, F$ ($m \geq 2$) będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $A \subseteq E_1 \times \dots \times E_m$, $a = (a_1, \dots, a_m) \in A$. Niech p_i będzie odpowiednim rzutowaniem kanonicznym, a u_i zanurzeniem. W rozpatrywanej sytuacji jeśli funkcja f jest różniczkowalna w a , to istnieją $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ dla $i = 1, \dots, m$ oraz $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = d_a f \circ u_i$ i $d_a f = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \circ p_i$.

Dowód. Z różniczkowalności f w a mamy $a \in \text{int } A$, więc $a_i \in \text{int } A_i$ dla każdego i . ${}^i f = f \circ \lambda_i$ jest złożeniem odwzorowań różniczkowalnych, mamy $d_{a_i} {}^i f = d_{\lambda_i(a_i)} f \circ d_{a_i} \lambda_i = d_a f \circ u_i$. Do tego

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \circ p_i = \sum_{i=1}^m d_a f \circ u_i \circ p_i = d_a f \circ \sum_{i=1}^m u_i \circ p_i = d_a f.$$

 $\square$

Uwaga. Z samego istnienia różniczek cząstkowych nie wynika nawet ciągłość f w a , przyjmując $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ mamy $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, bo $f(x, 0) = f(0, y) = 0$. Mamy $f(x, x) = \frac{1}{2}$ dla $x \neq 0$, więc funkcja nie jest ciągła.

Uwaga. Nawet w wymiarze nieskończonym ma sens zapis

$$d_a f \cdot (h_1, \dots, h_m) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \right] \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix},$$

gdzie mnożenie odpowiada wartościowaniu $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i$, co jest zwykłym mnożeniem macierzy, gdy rozpatrujemy $E_i = \mathbb{K}$.

Twierdzenie 13. Przy wprowadzonych oznaczeniach założmy, że $f : \Omega \rightarrow F$ jest różniczkowalne na $\Omega \in \text{top } E_1 \times \dots \times E_m$. f jest klasy $\mathcal{C}^1$ wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowania pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \Omega \ni x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in \mathcal{L}(E_i, F)$ są ciągłe.

Dowód. ($\implies$) Mamy $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = d_a f \circ u_i$, więc dla $\varphi_i : \mathcal{L}(E_1 \times \dots \times E_m, F) \ni L \rightarrow L \circ u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ mamy $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \varphi_i \circ f'$, co jest złożeniem odwzorowań ciągłych.

($\impliedby$) Mamy $d_a f = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \circ p_i$, więc dla $\psi_i : \mathcal{L}(E_i, F) \ni L \rightarrow L \circ p_i \in \mathcal{L}(E_1 \times \dots \times E_m, F)$ mamy $f' = \sum_{i=1}^m \psi_i \circ \frac{\partial f}{\partial x_i}$, co jest złożeniem odwzorowań ciągłych. $\square$

Uwaga. Niech $F = F_1 \times \dots \times F_n$ i niech v_j i q_j będą odpowiednio zanurzeniem i rzutowaniem związanym z tą przestrzenią. Rozważmy $a \in A \subseteq E_1 \times \dots \times E_m$ i odwzorowanie $f = (f_1, \dots, f_n) : A \rightarrow F_1 \times \dots \times F_n$ różniczkowalne w a . Mamy dobrze zdefiniowane $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \in \mathcal{L}(E_i, F_j)$. Jest $d_a f_j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \circ p_i$, skąd $d_a f = \sum_{j=1}^n v_j \circ d_a f_j = \sum_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1, \dots, m} v_j \circ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \circ p_i$. Można to zinterpretować macierzowo

$$d_a f \cdot h = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix},$$

co ponownie ma dokładny sens, gdy rozważamy $E_i = F_j = \mathbb{K}$.

Przykład. Dla $f : (0, +\infty)^2 \ni (x, y) \rightarrow \left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x} \right) \in \mathbb{R}^2$ mamy

$$d_{(x,y)} f = \begin{bmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{bmatrix}.$$

Do tego $\text{Jac } f(x, y) = \det d_{(x,y)} f = \frac{1}{xy} - \frac{xy}{x^2 y^2} = 0$.

Propozycja 12. Niech $E_1, \dots, E_n, F_1, \dots, F_m, G_1, \dots, G_\ell$ będą przestrzeniami Banacha nad ciałem $\mathbb{K}$. Niech u_i, p_i, v_j, q_j oraz w_k, r_k będą odpowiednio zanurzeniami i rzutowaniami na produkt odpowiednio przestrzeni $E = \prod_{i=1}^n E_i, F = \prod_{j=1}^m F_j$ i $G = \prod_{k=1}^\ell G_k$. Niech $A \subseteq E, B \subseteq A, f : A \rightarrow F, f(A) \subseteq B, g : B \rightarrow G$. Oznaczmy $\eta = g \circ f$. Ustalmy $a \in A, b = f(a)$. Załóżmy, że f jest różniczkowalne w a , a g jest różniczkowalne w b . Wtedy różniczki cząstkowe η dane są wzorem

$$\frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(a)) \circ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a).$$

Dowód.

$$d_a f = \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} v_j \circ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \circ p_i, \quad d_b g = \sum_{\substack{s=1,\dots,m \\ k=1,\dots,\ell}} w_k \circ \frac{\partial g_k}{\partial y_s}(b) \circ q_s.$$

Zatem

$$d_a \eta = \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m \\ s=1,\dots,m \\ k=1,\dots,\ell}} w_k \circ \frac{\partial g_k}{\partial y_s}(f(a)) \circ q_s \circ v_j \circ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \circ p_i = \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,\ell}} w_k \circ \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(a)) \circ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \circ p_i.$$

Druga równość wynika z $q_s \circ v_j = 0$ dla $s \neq j$ i $q_s \circ v_s = 1$. Zapiszmy $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_\ell)$. Mamy

$$\frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}(a) = r_k \circ d_a \eta \circ u_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(a)) \circ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$$

□

Uwaga. Wzór $d_a \eta = d_{f(a)} g \circ d_a f$ można interpretować macierzowo:

$$\left[\frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}(a) \right]_{\substack{k=1,\dots,\ell \\ i=1,\dots,n}} = d_a \eta = \left[\frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(a)) \right]_{\substack{k=1,\dots,\ell \\ j=1,\dots,m}} \cdot \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \right]_{\substack{j=1,\dots,m \\ i=1,\dots,n}}.$$

7. Zamiana ciała przy różniczkowaniu

2025-10-20

Definicja 11. Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{C}$, $a \in \text{int } A \subseteq A \subseteq E \neq \{0\}$ i $f : A \rightarrow F$. Odwzorowanie f jest $\mathbb{K}$ -różniczkowalne w a , gdy istnieje odwzorowanie $\mathbb{K}$ -liniowe $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ takie, że $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - L(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$.

Propozycja 13. $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F)$ jest $\mathbb{C}$ -liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $L(ix) = iL(x)$ dla $x \in E$.

Propozycja 14. Odwzorowanie f jest $\mathbb{C}$ -różniczkowalne w a wtedy i tylko wtedy, gdy f jest $\mathbb{R}$ -różniczkowalne w a i różniczka $d_a^{\mathbb{R}} f$ jest $\mathbb{C}$ -liniowa.

Przykład. $f : \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \rightarrow (x, 0) \in \mathbb{R}^2$ jest $\mathbb{R}$ -różniczkowalne, ale nie $\mathbb{C}$ -różniczkowalne. Rzeczywiście, f jest $\mathbb{R}$ -liniowe, więc $d_{(x,y)} f = f$, ale obraz f to jedna oś współrzędnych, która nie jest podprzestrzenią (zespólną) $\mathbb{C}$, więc f nie może być $\mathbb{C}$ -liniowe.

Przykład. $f : \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \rightarrow (x^2 + y^2, 2xy) \in \mathbb{R}^2$ jest $\mathbb{R}$ -różniczkowalne, mamy $d_{(x,y)} f = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$. Zatem $d_{(a,y)} f \cdot (h_1, h_2) = (2xh_1 - 2yh_2, 2yh_1 + 2xh_2) = 2(xh_1 - yh_2, yh_1 + xh_2) = 2(x + iy)(h_1 + ih_2)$, co jest $\mathbb{C}$ -liniowe, mamy $d_z^{\mathbb{C}} f(w) = 2zw$, wyjściowe odwzorowanie to po prostu $f(z) = z^2$.

Przykład. Niech $f = u + iv$ będzie funkcją z $(\mathbb{C}^m, a)$ w $\mathbb{C}$, która jest $\mathbb{R}$ -różniczkowalna. Dla uproszczenia przyjmujemy $m = 1$. Mamy $\mathbb{C} \ni z = x + iy$ oraz zdefiniowane wcześniej oznaczenie na rzutowanie $dx : \mathbb{C} \ni z = x + iy \rightarrow x \in \mathbb{R}$ i analogicznie dy . W tej chwili $dz = dx + i dy$ oznacza identyczność na $\mathbb{C}$. Mamy $d_a^{\mathbb{R}} f = \frac{\partial f}{\partial x}(a) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a) dy$, a to jest $\mathbb{C}$ -liniowe dokładnie wtedy, gdy $d_a^{\mathbb{R}} f(i) = i d_a^{\mathbb{R}} f(1)$, czyli $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = i \frac{\partial f}{\partial x}(a)$.

Podstawiając definicję f dostajemy $\frac{\partial u}{\partial y}(a) + i \frac{\partial v}{\partial y}(a) = i \left(\frac{\partial u}{\partial x}(a) + i \frac{\partial v}{\partial x}(a) \right)$, co sprowadza się do

układu zwanego równaniami Cauchy'ego-Riemanna:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}.$$

Uwaga. Zauważmy, że funkcja $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ daje się zapisać za pomocą zmiennej $z = x + iy$ oraz wzorów Eulera $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2}i$ jako funkcja $f(z, \bar{z})$. Wprowadzając oznaczenie $d\bar{z} = dx - i dy$ spróbujemy zapisać $d_a^{\mathbb{R}} f = \alpha dz + \beta d\bar{z}$ przy pewnych $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Oznaczmy $\frac{\partial f}{\partial z} = \alpha$ i $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \beta$. Takie napisy nazywamy pochodnymi formalnymi.

$$\begin{aligned} d_a^{\mathbb{R}} f &= \frac{\partial f}{\partial x}(a) dx - i \frac{\partial f}{\partial y}(a) i dy = \frac{\partial f}{\partial x}(a) (dx + i dy) - i \frac{\partial f}{\partial y}(a) (dx + i dy) - \frac{\partial f}{\partial x}(a) i dy + i \frac{\partial f}{\partial y}(a) dx \\ &- \frac{\partial f}{\partial x}(a) dx + i \frac{\partial f}{\partial y}(a) (-i dy) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) dx - i \frac{\partial f}{\partial y}(a) (-i dy) = \\ &\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right) dz + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right) d\bar{z} - \frac{\partial f}{\partial x}(a) dx + i \frac{\partial f}{\partial y}(a) (i dy) = \\ &\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right) dz + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right) d\bar{z} - d_a^{\mathbb{R}} f. \end{aligned}$$

Zatem

$$d_a^{\mathbb{R}} f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right) d\bar{z} = \frac{\partial f}{\partial z}(a) dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) d\bar{z}.$$

Zauważmy, że $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = i \frac{\partial f}{\partial x}(a) \iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$ jest kolejnym warunkiem równoważnym $\mathbb{C}$ -różniczkowalności.

Twierdzenie 14. Funkcja $f = u + iv : (\mathbb{C}^m, a) \rightarrow \mathbb{C}$, która jest $\mathbb{R}$ -różniczkowalna w a jest $\mathbb{C}$ -różniczkowalna w a , gdy zachodzi jeden z poniższych (równoważnych) warunków:

1. $\frac{\partial f}{\partial y_j}(a) = i \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ dla $j = 1, \dots, m$.
2. $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial v}{\partial y_j}(a) \\ \frac{\partial u}{\partial y_j}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x_j}(a) \end{cases}$ dla $j = 1, \dots, m$.
3. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0$ dla $j = 1, \dots, m$.

Dowód. Wynika z powyższych rozważań. □

Uwaga. Jeśli $f : (\mathbb{C}^m, a) \rightarrow \mathbb{C}$ jest $\mathbb{C}$ -różniczkowalna w a , to jest też $\mathbb{R}$ -różniczkowalna w a . Mamy utożsamienie $d_a^{\mathbb{C}} f \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{C})$ oraz $d_a^{\mathbb{R}} f \in \mathcal{M}_{2m \times 2m}(\mathbb{R})$, a więc możemy policzyć $\text{Jac}^{\mathbb{C}} f(a)$ i $\text{Jac}^{\mathbb{R}} f(a)$. Okazuje się, że $\text{Jac}^{\mathbb{R}} f(a) = \left| \text{Jac}^{\mathbb{C}} f(a) \right|^2$.

8. Twierdzenie o przyrostach

2025-10-23

Twierdzenie 15 (O przyrostach). Niech F będzie przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$, $a < b$ w $\mathbb{R}$, funkcje $f : [a, b] \rightarrow F$ oraz $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będą ciągłe i istnieje taki zbiór $S \subseteq [a, b]$, że $|S| \leq \aleph_0$ i $a, b \in S$ oraz dla każdego $t \in [a, b] \setminus S$ istnieją $f'_+(t), g'_+(t)$ i $\|f'_+(t)\| \leq g'_+(t)$. W takiej sytuacji zachodzi $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$.

Dowód. Udowodnione na AM2. □

Uwaga. Powyższe twierdzenie działa tak samo, gdy pochodne prawostronne zastąpimy lewostronnymi (wystarczy je zastosować do funkcji $\tilde{f}(t) = -f(t)$). Najczęściej stosujemy je w sytuacji, gdy $S = \{a, b\}$ i f, g są różniczkowalne w (a, b) .

Definicja 12. Odcinkiem (wektorowym) o końcach $a, b \in E$ (gdzie E jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$) nazywamy zbiór $[a, b] = \{a + t(b - a) : t \in [0, 1]\}$.

Definicja 13. Podzbiór $C \subseteq E$, gdzie E jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$, nazywamy wypukłym, gdy dla każdych $x, y \in C$ mamy $[x, y] \subseteq C$.

Twierdzenie 16. Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $\Omega \in \text{top } E$, niech $f : \Omega \rightarrow F$ będzie różniczkowalna oraz $[a, b] \subseteq \Omega$. Jeśli istnieje takie $K > 0$, że dla każdego $x \in [a, b]$ mamy $\|d_x f\| \leq K$, to $\|f(b) - f(a)\| \leq K \|b - a\|$.

Dowód. Określamy $\tilde{f}(t) = f(a + t(b - a))$ oraz $\tilde{g}(t) = K \|b - a\| t$ dla $t \in [0, 1]$. Są to funkcje ciągłe, mają pochodne prawostronne w $[0, 1]$ a ponadto

$$\|\tilde{f}'_+(t)\| = \left\| \frac{d}{dt} f(a + t(b - a)) \right\| \leq \|d_{a+t(b-a)} f\| \|b - a\| \leq K \|b - a\| = g'_+(t).$$

Teza wynika z twierdzenia o przyrostach. $\square$

Wniosek. Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $\Omega \subseteq E$ otwarty i wypukły, $f : \Omega \rightarrow F$ różniczkowalna taka, że $\|d_x f\| \leq K$ dla pewnego $K > 0$ i każdego $x \in \Omega$. Wtedy dla każdego $a, b \in \Omega$ mamy $\|f(b) - f(a)\| \leq K \|b - a\|$.

Twierdzenie 17. Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $D \subseteq E$ obszarem (zbiór otwarty i spójny). Niech $f : D \rightarrow F$ będzie funkcją różniczkowalną taką, że $d_x f \equiv 0$ dla każdego $x \in D$. Wtedy $f \equiv \text{const}$.

Dowód. Ustalmy pewne $a \in D$ i rozważmy zbiór $\tilde{D} = \{x \in D : f(x) = f(a)\}$. Oczywiście $a \in \tilde{D}$. Mamy $\tilde{D} = f^{-1}(\{f(a)\})$, a funkcja różniczkowalna jest ciągła, więc $\tilde{D}$ jest domknięty. Ustalmy $x_0 \in \tilde{D}$ i wybierzmy $r > 0$ tak, by $K(x_0, r) \subseteq D$ (z otwartości D). Kule są wypukłe, a więc dla każdego $x \in K(x_0, r)$ mamy $\|f(x) - f(x_0)\| \leq 0 \cdot \|x - x_0\|$, więc $f(x) = f(x_0) = f(a)$, czyli $K(x_0, r) \subseteq \tilde{D}$. Zatem $\tilde{D}$ jest niepusty, otwarty i domknięty, co wobec spójności D daje $\tilde{D} = D$. $\square$

Twierdzenie 18. Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $a \in \Omega \in \text{top } E$, $h \in E$ będzie takie, że $[a, a + h] \subseteq \Omega$ oraz niech $f : \Omega \rightarrow F$ będzie różniczkowalna. Zachodzi

$$\|f(a + h) - f(a) - d_a f(h)\| \leq \sup_{x \in [a, a+h]} \|d_x f - d_a f\| \|h\|.$$

Dowód. Możemy założyć, że supremum jest skończone (inaczej teza jest trywialna) i wynosi K . Na Ω rozważamy funkcję $\tilde{f} = f - d_a f$. Zachodzi

$$\tilde{f}(a + h) - \tilde{f}(a) = f(a + h) - d_a f(a + h) - f(a) + d_a f(a) = f(a + h) - f(a) - d_a f(h).$$

Mamy $d_x \tilde{f} = d_x f - d_a f$, zatem $\|d_x \tilde{f}\| \leq K$ dla każdego $x \in [a, a + h]$. Nierówność

$$\|\tilde{f}(a + h) - \tilde{f}(a)\| \leq K \|a + h - a\|$$

kończy dowód. $\square$

9. Ciągi i szeregi funkcji różniczkowalnych

2025-10-23

Twierdzenie 19. Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $D \subseteq E$ zbiorem wypukłym i ograniczonym. Niech $f_n : D \rightarrow F$ będzie różniczkowalna dla $n \in \mathbb{N}_+$ oraz niech $g : D \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ będzie taka, że $f'_n \rightrightarrows g$ oraz niech istnieje takie $x_0 \in D$, że $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}_+}$ jest zbieżny. W takiej sytuacji $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ zbiega jednostajnie do pewnej funkcji różniczkowalnej $f : D \rightarrow F$ takiej, że $f' = g$.

Dowód. Jest spełniony jednostajny warunek Cauchy'ego

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N \forall x \in D \|d_x f_m - d_x f_n\| < \varepsilon.$$

D jest wypukły oraz $(f_m - f_n)'(x) = d_x f_m - d_x f_n$, więc dla odpowiednio dużych m, n i $a, x \in D$ mamy

$$\|(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(a)\| \leq \varepsilon \|x - a\|.$$

Stąd wynika, że dla każdego $x \in D$ ciąg $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}_+}$ jest Cauchy'ego:

$$\|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon \|x - x_0\| + \|(f_m - f_n)(x_0)\| \leq \varepsilon',$$

gdzie pierwsza nierówność to skorzystanie z poprzedniej dla $a = x_0$, a druga to ograniczoność D i zbieżność $f_n(x_0)$. Przestrzeń F jest zupełna, więc istnieje granica punktowa $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. Przechodząc w powyższej nierówności z m do $+\infty$ dostajemy jednostajną zbieżność. Do tego

$$\begin{aligned} \|f(a+h) - f(a) - g(a) \cdot h\| &\leq \|(f - f_n)(a+h) - (f - f_n)(a)\| + \|f_n(a+h) - f_n(a) - g(a) \cdot h\| \\ &\leq \varepsilon \|h\| + \varepsilon \|h\| + \|f'_n(a) \cdot h - g(a) \cdot h\| \leq 2\varepsilon \|h\| + \|f'_n(a) - g(a)\| \|h\| \leq 3\varepsilon \|h\|, \end{aligned}$$

gdzie pierwszy wyraz szacujemy przechodząc $m \rightarrow \infty$ w ograniczeniu na przyrost $f_m - f_n$, a drugi szacujemy z różniczkowalności f_n i zbieżności $f'_n \rightrightarrows g$. Dostajemy $f' = g$, co kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 20. Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $D \subseteq E$ obszarem. Niech $f_n : D \rightarrow F$ będzie różniczkowalna dla $n \in \mathbb{N}_+$ oraz niech $g : D \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ będzie taka, że $f'_n \xrightarrow{\text{lok}} g$ oraz niech istnieje takie $x_0 \in D$, że $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}_+}$ jest zbieżny. W takiej sytuacji $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ zbiega lokalnie jednostajnie do pewnej funkcji różniczkowalnej $f : D \rightarrow F$, takiej, że $f' = g$.

Dowód. Oznaczmy $\tilde{D} = \{x \in D : (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}_+} \text{ jest zbieżny}\}$. Mamy $x_0 \in \tilde{D}$. Dla $a \in \tilde{D}$ możemy wybrać $r > 0$ takie, że $K(a, r) \subseteq D$ oraz $f'_n|_{K(a, r)}$ jest zbieżne jednostajnie. Na tej kuli stosujemy poprzednie twierdzenie (możemy, bo w a mamy zbieżność punktową), mamy $K(a, r) \subseteq \tilde{D}$.

Ustalmy ciąg $(a_n) \subseteq \tilde{D}$ taki, że $a_n \rightarrow b$. Dobieramy $K(b, r)$ jak wcześniej, istnieje takie m , że $a_n \in K(b, r)$ dla $n \geq m$. W a_m mamy zbieżność punktową, więc podobnie jak przedtem $K(b, r) \subseteq \tilde{D}$. W szczególności $b \in \tilde{D}$, więc $\tilde{D}$ jest domknięty, otwarty i niepusty. Z tego wynika $\tilde{D} = D$. Różniczkowalność f wynika z poprzedniego twierdzenia zastosowanego lokalnie. $\square$

Twierdzenie 21. Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $D \subseteq E$ obszarem. Niech $f_n : D \rightarrow F$ będzie różniczkowalne dla $n \in \mathbb{N}_+$, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ lokalnie jednostajnie zbieżny oraz niech istnieje $x_0 \in D$ takie, że $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ jest zbieżny. W takiej sytuacji $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest lokalnie jednostajnie zbieżny, jego suma jest funkcją różniczkowalną oraz $(\sum_{n=1}^{\infty} f_n)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n$.

Dowód. Stosujemy poprzednie twierdzenie do sum cząstkowych. $\square$

Uwaga. To twierdzenie daje nam możliwość różniczkowania szeregów potęgowych wyraz po wyrazie.

Definicja 14. Funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ dla otwartego $D \subseteq \mathbb{K}^m$ jest $\mathbb{K}$ -analityczna, jeśli lokalnie jest sumą zbieżnego szeregu potęgowego, czyli dla polidysku $P(a, r) = \{x \in \mathbb{K}^m : \forall j \in [m] |x_j - a_j| < r\}$ mamy, że dla każdego $x_0 \in D$ istnieje takie $r > 0$, że $f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} c_\alpha (x - x_0)^\alpha$ w $P(x_0, r)$, gdzie $b^\alpha = b_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot b_m^{\alpha_m}$ a zbieżność rozumiemy w sensie rodzin bezwzględnie sumowalnych.

Lemat 2 (Abel). Rozważmy promień $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$. Jeśli dla pewnej rodziny $(c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^m} \subseteq \mathbb{K}$ oraz pewnego $C > 0$ mamy $|c_\alpha \bar{r}^\alpha| < C$, to szereg potęgowy $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} c_\alpha (x - x_0)^\alpha$ jest zbieżny lokalnie jednostajnie na $P(x_0, \bar{r}) = \{x \in \mathbb{K}^m : \forall j \in [m] |x_j - x_{0j}| < r_j\}$.

Dowód. Weźmy $\theta \in (0, 1)$ oraz $x \in P(x_0, \theta\bar{r})$. Można przeszacować (oznaczając $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$)

$$\left| \sum_{k=0}^N \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha (x - x_0)^\alpha \right| \leq \sum_{k=0}^N \sum_{|\alpha|=k} C \theta^{|\alpha|} = C \sum_{k=0}^N \binom{m+k-1}{m-1} \theta^k,$$

co jest zbieżne. Zatem mamy zbieżność lokalnie jednostajną, bo dla każdego x można dobrać θ tak, by $x \in P(x_0, \theta\bar{r})$. $\square$

Wniosek. Jeśli rzeczywisty szereg potęgowy $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} c_\alpha (x - x_0)^\alpha$ jest lokalnie jednostajnie zbieżny na polidysku rzeczywistym $P_{\mathbb{R}}(x_0, r)$, to jest też lokalnie jednostajnie zbieżny na $P_{\mathbb{C}}(x_0, r)$.

Dowód. Ustalmy $a \in P_{\mathbb{C}}(x_0, r)$. Wiemy, że wyrazy szeregu zbiegają do zera w pewnym otoczeniu a , a więc $|c_\alpha (x - x_0)^\alpha| \leq C$ dla pewnego $C > 0$. Przechodząc z x do granicy polidysku dostajemy $|c_\alpha r^\alpha| \leq C$, a więc z lematu szereg jest lokalnie jednostajnie zbieżny w otoczeniu a , a więc również w $P_{\mathbb{C}}(x_0, r)$. $\square$

Propozycja 15. Jeśli szereg potęgowy $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} c_\alpha (x - x_0)^\alpha$ jest jednostajnie zbieżny na $P(x_0, r)$, to szereg jego pochodnych $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} \sum_{i=1}^m \alpha_i c_\alpha (x - x_0)^{\alpha - e_i}$ jest lokalnie jednostajnie zbieżny.

Dowód. Jednostajna zbieżność szeregu potęgowego daje nam $|c_\alpha r^\alpha| < C$. Podobnie jak w lemacie Abela dla θ takiego, że $|x - x_0| \leq \theta r$ mamy

$$\left| \sum_{k=0}^N \sum_{|\alpha|=k} \sum_{i=1}^m \alpha_i c_\alpha (x - x_0)^{\alpha - e_i} \right| \leq C \sum_{k=0}^N mk \binom{m+k-1}{m-1} \theta^{k-1},$$

gdzie tym razem dodatkowo skorzystaliśmy z $\alpha_i \leq k$. Ten szereg jest jednostajnie zbieżny, co daje tezę. $\square$

Wniosek. Funkcje analityczne mają pochodne analityczne.

10. Pochodne cząstkowe a różniczkowalność

2025-10-27

Twierdzenie 22 (O różniczkowaniu w punkcie). Niech $E_1, \dots, E_m, F$ będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$ ($m \geq 2$), $\Omega \in \text{top } E_1 \times \dots \times E_m$, $f : \Omega \rightarrow F$, $a \in \Omega$. Załóżmy, że istnieje otoczenie otwarte $a \in \Omega_0 \subseteq \Omega$ takie, że na Ω_0 funkcja f posiada ciągle pochodne cząstkowe. W takiej sytuacji f jest różniczkowalna w a .

Dowód. Kandydatem na różniczkę jest oczywiście $L = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \circ p_j$. Przeliczamy

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) - \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \cdot (x_j - a_j) &= f(x_1, \dots, x_m) - f(a_1, x_2, \dots, x_m) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot (x_1 - a_1) \\ &+ f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, x_3, \dots, x_m) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \cdot (x_2 - a_2) + \dots = \sum_{j=0}^{m-1} R_{j+1}(x), \end{aligned}$$

$$\text{dla } R_{j+1}(x) = f(a_1, \dots, a_j, x_{j+1}, \dots, x_m) - f(a_1, \dots, a_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_m) - \frac{\partial f}{\partial x_{j+1}}(a) \cdot (x_{j+1} - a_{j+1}).$$

Z ciągłości pochodnych cząstkowych mamy $\left\| \frac{\partial f}{\partial x_{j+1}}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_{j+1}}(a) \right\| < \varepsilon$ dla wszystkich j i x takich, że $|x_j - a_j| < r$ dla pewnego r i wszystkich j . Ustaliwszy punkt $x = (x_1, \dots, x_m)$ oznaczmy $\hat{x}_{j+1} = (x_{j+2}, \dots, x_m)$ i potraktujmy x_{j+1} jako zmienny: $R_{j+1}^{\hat{x}_{j+1}}(x_{j+1}) := R_{j+1}(x)$, co zadaje nam funkcję

z $K(a_{j+1}, r)$ w F . Z twierdzenia o przyrostach mamy

$$\begin{aligned} \left\| R_{j+1}^{\hat{x}_{j+1}}(x_{j+1}) \right\| &= \left\| R_{j+1}^{\hat{x}_{j+1}}(x_{j+1}) - R_{j+1}^{\hat{x}_{j+1}}(a_{j+1}) \right\| \leq \sup_{y \in K(a_{j+1}, r)} \left\| d_y R_{j+1}^{\hat{x}_{j+1}} \right\| \|x_{j+1} - a_{j+1}\| = \\ &\sup_{y \in K(a_{j+1}, r)} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_{j+1}}(a_1, \dots, a_j, y, \hat{x}_{j+1}) - 0 - \frac{\partial f}{\partial x_{j+1}}(a) \right\| \|x_{j+1} - a_{j+1}\| \leq \varepsilon \|x_{j+1} - a_{j+1}\|, \end{aligned}$$

zatem $\|f(x) - f(a) - L(x - a)\| \leq \sum_{j=0}^{m-1} \|R_{j+1}(x)\| \leq \varepsilon \sum_{j=0}^{m-1} \|x_{j+1} - a_{j+1}\|$, koniec. $\square$

Uwaga. Czasem poszukuje się innych wersji tego twierdzenia, najczęściej przy słabszych założeniach. Można pokazać na przykład, że wystarczy nam istnienie jednej z różniczek cząstkowych w a oraz ciągłość pozostałych pochodnych cząstkowych w otoczeniu a .

Twierdzenie 23. Niech $E_1, \dots, E_m, F$ będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$ ($m \geq 2$), $\Omega \in \text{top } E_1 \times \dots \times E_m$, $f : \Omega \rightarrow F$. Funkcja f jest klasy $\mathcal{C}^1$ w Ω wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie pochodne cząstkowe istnieją w Ω i są ciągłe.

Dowód. ($\implies$) Już dowodziliśmy.

($\impliedby$) Poprzednie twierdzenie daje nam różniczkowalność f , a przy tym założeniu już dowodziliśmy. $\square$

11. Dyfeomorfizmy

2025-10-27

Propozycja 16. Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $a \in A \subseteq E$, $b \in B \subseteq F$. Niech $f : A \rightarrow B$ będzie bijekcją taką, że $f(a) = b$ oraz f jest różniczkowalne w a , a f^{-1} jest różniczkowalne w b . W takiej sytuacji $d_a f \in \text{Isom}(E, F)$ oraz $d_b f^{-1} = (d_a f)^{-1}$.

Dowód. Mamy $\text{id} = d_b(f \circ f^{-1}) = d_a f \circ d_b f^{-1}$ i tak samo $\text{id} = d_b f^{-1} \circ d_a f$, co daje tezę. $\square$

Twierdzenie 24. Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $a \in \text{int } A \subseteq A \subseteq E$, $b \in \text{int } B \subseteq B \subseteq F$. Niech $f : A \rightarrow B$ będzie bijekcją taką, że $f(a) = b$ oraz f jest różniczkowalne w a , a f^{-1} jest ciągłe w b . W takiej sytuacji f^{-1} jest różniczkowalne w b wtedy i tylko wtedy, gdy $d_a f \in \text{Isom}(E, F)$.

Dowód. ($\implies$) Wynika z poprzedniego.

($\impliedby$) Mamy $f(x) - f(a) = d_a f(x - a) + \eta(x) \|x - a\|$, gdzie $\eta : A \rightarrow F$ jest ciągła i zerowa w a . $d_a f$ jest izomorfizmem, więc istnieje takie $m > 0$, że $\|d_a f \cdot h\| \geq m \|h\|$, czyli $\|(d_a f)^{-1}\| \leq \frac{1}{m}$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z ciągłości $\eta \circ f^{-1}$ w b mamy $r > 0$ takie, że $K(b, r) \subseteq B$ oraz dla $y \in K(b, r)$ jest $\|\eta(f^{-1}(y))\| \leq \frac{m}{2} \min(1, \varepsilon m)$. Kładąc $x = f^{-1}(y)$ możemy przeliczyć

$$\|f(x) - f(a)\| \geq \|d_a f(x - a)\| - \|\eta(x)\| \|x - a\| \geq m \|x - a\| - \frac{m}{2} \|x - a\| = \frac{m}{2} \|x - a\|,$$

gdzie pierwsze przejście to odwrotna nierówność trójkąta. Mamy zatem

$$\begin{aligned} \|f^{-1}(y) - f^{-1}(b) - (d_a f)^{-1} \cdot (y - b)\| &= \|x - a - (d_a f)^{-1} \cdot (f(x) - f(a))\| = \\ &\|(d_a f)^{-1} (d_a f \cdot (x - a) - (f(x) - f(a)))\| \leq \frac{1}{m} \|\eta(x)\| \|x - a\| \leq \frac{1}{m} \varepsilon m \frac{m}{2} \|x - a\| \leq \varepsilon \|y - b\|. \end{aligned}$$

$\square$

Definicja 15. Niech E, F będą przestrzeniami Banacha na $\mathbb{K}$, $U \in \text{top } E$, $V \in \text{top } F$. Odwzorowanie $f : U \rightarrow V$ nazywamy dyfeomorfizmem, gdy jest bijekcją klasy $\mathcal{C}^1$ o funkcji odwrotnej f^{-1} klasy $\mathcal{C}^1$.

Uwaga. Dyfeomorficzność implikuje homeomorficzność, ale nawet homeomorfizm klasy $\mathcal{C}^1$ nie musi być dyfeomorfizmem, np. $f(x) = x^3$, którego odwrotność $\sqrt[3]{x}$ nie jest różniczkowalna w 0.

Izomorfizmy topologiczne są dyfeomorfizmami. Złożenia dyfeomorfizmów to dyfeomorfizmy.

Twierdzenie 25. Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $U \in \text{top } E$, $V \in \text{top } F$. Niech $f : U \rightarrow V$ będzie homeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^1$. f jest dyfeomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $d_x f \in \text{Isom}(E, F)$ dla każdego $x \in U$.

Dowód. $(\implies)$ f^{-1} jest różniczkowalne w $f(x)$, więc $d_x f \in \text{Isom}(E, F)$.

$(\impliedby)$ f^{-1} jest różniczkowalna w V , mamy $d_y f^{-1} = (d_{f^{-1}(y)} f)^{-1}$, zatem $(f^{-1})' = \eta \circ f' \circ f^{-1}$, gdzie $\eta : \text{Isom}(E, F) \ni \varphi \rightarrow \varphi^{-1} \in \text{Isom}(F, E)$. Wszystkie składane funkcje są ciągłe, więc mamy tezę. $\square$

Uwaga (Przypomnienie). Twierdzenie Banacha o punkcie stałym: niech (X, d) będzie zupełną przestrzenią metryczną, $f : X \rightarrow X$ kontrakcją (odwzorowaniem θ -lipschitzowskim dla $\theta \in [0, 1)$). Istnieje dokładnie jeden punkt stały f .

W algebrze Banacha A dla $\|\alpha\| < 1$ mamy $1 - \alpha \in G(A)$.

Twierdzenie 26 (O lokalnym dyfeomorfizmie). Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, niech $a \in \Omega \in \text{top } E$. Ustalmy $f : \Omega \rightarrow F$ klasy $\mathcal{C}^1$ takie, że $d_a f \in \text{Isom}(E, F)$. Istnieją otoczenia $a \in U \subseteq \Omega$ i $f(a) \in V \subseteq F$ takie, że $f(U) = V$ oraz $f|_U : U \rightarrow V$ jest dyfeomorfizmem.

Dowód. Niech $g = (d_a f)^{-1} \circ f : \Omega \rightarrow E$. Jest to odwzorowanie klasy $\mathcal{C}^1$. Do tego $d_a g = (d_a f)^{-1} \circ d_a f = \text{id}_E$. Jeśli wskażemy otoczenia $U \ni a$, $W \ni g(a)$ takie, że $g(U) = W$ i $g|_U$ jest dyfeomorfizmem, to otrzymamy dyfeomorfizm $f|_U = d_a f \circ g|_U$ z U na $d_a f(W)$. Zatem to nam wystarczy.

Wprowadźmy $\varphi : \Omega \ni x \rightarrow x - g(x) \in E$, które jest $\mathcal{C}^1$. Mamy $d_a \varphi = \text{id}_E - d_a g = 0$. Z ciągłości istnieje $r > 0$ takie, że dla każdego $x \in \overline{K}(a, r) \subseteq \Omega$ mamy $\|d_x \varphi\| \leq \frac{1}{2}$. Z twierdzenia o przyrostach mamy $\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|$ dla $x_1, x_2 \in \overline{K}(a, r)$. Ponadto $d_x g = \text{id}_E - d_x \varphi$ jest odwracalne w algebrze Banacha $\mathcal{L}(E, E)$, więc $d_x g \in \text{Isom}(E, E)$ dla każdego $x \in \overline{K}(a, r)$.

Pokażemy, że dla każdego $y \in K(g(a), \frac{r}{2})$ istnieje dokładnie jeden $x \in K(a, r)$ taki, że $g(x) = y$. Ustalmy y i rozważmy równanie $0 = y - g(x)$, czyli $x = y + \varphi(x)$. Odwzorowanie $h_y : \overline{K}(a, r) \ni x \rightarrow y + \varphi(x) \in E$ przyjmuje wartości w $K(a, r)$, bo $\|h_y(x) - a\| = \|y - g(a) + \varphi(x) - \varphi(a)\| \leq \|y - g(a)\| + \|\varphi(x) - \varphi(a)\| < \frac{r}{2} + \frac{1}{2} \|x - a\| \leq r$.

φ jest $\frac{1}{2}$ -lipschitzowskie, z czego wynika, że h_y jest $\frac{1}{2}$ -lipschitzowskie, zatem ma jedyny punkt stały (bo kula domknięta jest zupełna). Jest nim $x_y = h_y(x_y) \in K(a, r)$, zatem $g(x_y) = y$. Pokazaliśmy, że g jest bijekcją z $U = K(a, r) \cap g^{-1}(K(g(a), \frac{r}{2}))$ w $K(g(a), \frac{r}{2})$. Do tego $g|_U$ jest ciągłe i ma różniczkę będącą izomorfizmem. Pozostaje sprawdzić ciągłość $g|_U^{-1}$.

Dla $x_1, x_2 \in U$ mamy $\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|$. Z odwrotnej nierówności trójkąta mamy $\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \geq \|x_1 - x_2\| - \|g(x_1) - g(x_2)\|$. Zatem $\frac{1}{2} \|x_1 - x_2\| \leq \|g(x_1) - g(x_2)\|$, czyli $g|_U^{-1}$ jest 2-lipschitzowskie, a więc ciągłe. Ostatecznie dostajemy, że $g|_U$ jest dyfeomorfizmem. $\square$

Uwaga. Powyższe twierdzenie zachodzi dla dowolnej klasy $\mathcal{C}^k$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty, \omega\}$.

Twierdzenie 27. Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $\Omega \in \text{top } E$, $f : \Omega \rightarrow F$ będzie klasy $\mathcal{C}^1$. Następujące warunki są równoważne:

1. $f(\Omega) \in \text{top } F$ i $f : \Omega \rightarrow f(\Omega)$ jest dyfeomorfizmem.
2. f jest iniekcją oraz $\forall x \in \Omega \quad d_x f \in \text{Isom}(E, F)$.

Dowód. $(\implies)$ Wynika z poprzednich.

$(\impliedby)$ Z twierdzenia o lokalnym dyfeomorfizmie dla każdego $a \in \Omega$ istnieją otoczenia $a \in U_a \subseteq \Omega$, $f(a) \in V_a \subseteq F$ takie, że $f|_{U_a} : U_a \rightarrow V_a$ jest dyfeomorfizmem. Wtedy $V_a \subseteq f(\Omega)$, skąd $f(\Omega)$ jest

otwarty, a z iniektywności f mamy poprawnie określone $f^{-1} : f(\Omega) \rightarrow \Omega$, które jest lokalnie klasy $\mathcal{C}^1$, skąd mamy tezę. $\square$

Uwaga. Dla $E = F = \mathbb{K}^n$ warunek $d_x f \in \text{Isom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ jest równoważny $\text{Jac } f(x) \neq 0$. W szczególności dla $n = 1$ oznacza to $f'(x) \neq 0$, co nad $\mathbb{R}$ na podstawie twierdzenia Rolle'a daje nam iniektywność. Nie działa to jednak nad $\mathbb{C}$, bo np. $\exp(z)$ jest klasy $\mathcal{C}^1$ i ma niezerową pochodną, ale jest okresowy.

Uwaga (Hipoteza Kellera, hipoteza jakobianowa). Niech $F = (F_1, \dots, F_m) : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^m$ będzie odwzorowaniem wielomianowym (F_i jest wielomianem) takim, że $\text{Jac } F \neq 0$. Wtedy spodziewamy się, że F jest iniekcją.

Dla $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ łatwo pokazać bijektywność z iniektywności, dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ również zostało to pokazane. Dla $m = 1$ hipoteza jest udowodniona, dla $m > 1$ i $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ problem jest otwarty, a dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ podano kontrprzykład dla $m = 2$.

Dla $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ teza jest równoważna pokazaniu, że F jest właściwe, czyli przeciwobraz zbioru zwartego jest zwarty. Równoważnie: $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|F(x)\| = +\infty$.

W przypadku zespolonym F^{-1} też jest wielomianowe (jeśli istnieje). Ponadto $\text{Jac } F \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$, zatem jeśli ten wielomian nie ma pierwiastków, to musi być stały.

12. Funkcje uwikłane

2025-10-30

Twierdzenie 28 (O funkcji uwikłanej). Niech E, F, G będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$. Niech $\Omega \in \text{top}(E \times F)$ oraz niech $f : \Omega \ni (x, y) \rightarrow f(x, y) \in G$ będzie klasy $\mathcal{C}^1$. Ustalmy $(a, b) \in f^{-1}(0)$. Zakładamy, że $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \in \text{Isom}(F, G)$. W takiej sytuacji istnieją otoczenia $a \in U \subseteq E$, $b \in V \subseteq F$ oraz odwzorowanie $g : U \rightarrow V$ klasy $\mathcal{C}^1$ takie, że $U \times V \subseteq \Omega$ oraz $(x, y) \in U \times V \cap f^{-1}(0) \iff y = g(x)$ (to znaczy $U \times V \cap f^{-1}(0)$ jest wykresem g).

Dowód. Niech $\Phi(x, y) = (x, f(x, y))$ będzie określone na Ω . Mamy $\Phi(a, b) = (a, 0)$ oraz $d_{(a,b)} \Phi = (p_E, d_{(a,b)} f)$. Jeśli dla $(h', k') \in E \times G$ chcemy znaleźć $(h, k) \in E \times F$ takie, że

$$(h', k') = d_{(a,b)} \Phi(h, k) = \left(h, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot k \right),$$

to musi być $h = h'$ i $k = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right)^{-1} \left(k' - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot h \right)$, zatem $d_{(a,b)} \Phi$ jest liniową i ciągłą bijekcją, a więc izomorfizmem topologicznym (stosujemy tu twierdzenie Banacha).

Z twierdzenia o lokalnym dyfeomorfizmie mamy otoczenia $(a, b) \in \tilde{U} \subseteq \Omega$ i $(a, 0) \in \tilde{V} \subseteq E \times G$ takie, że $\Phi|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ jest dyfeomorfizmem. Rozważmy $\tilde{g} = (\Phi|_{\tilde{U}})^{-1}$. Musi być $\tilde{g}(x, z) = (x, \tilde{g}_1(x, z))$, gdzie $\tilde{g}_1$ jest klasy $\mathcal{C}^1$.

Niech $W = \{x \in E : (x, 0) \in \tilde{V}\} \ni a$. Ten zbiór jest otwarty, bo jest przeciwobrazem $\tilde{V}$ w zanurzeniu z E do $E \times G$. Wybieramy takie otoczenia $a \in \tilde{W} \subseteq W$ i $b \in V \subseteq F$, że $\tilde{W} \times V \subseteq \tilde{U}$. Z ciągłości $\tilde{g}_1$ możemy wybrać takie otoczenie $a \in U \subseteq \tilde{W}$, że $\tilde{g}_1(U \times \{0\}) \subseteq V$.

Dla $(x, y) \in U \times V$ mamy równoważność $\tilde{g}_1(x, 0) = y \iff \Phi(x, y) = (x, 0) \iff f(x, y) = 0$. Zatem $g = \tilde{g}_1(\cdot, 0)|_U$ jest funkcją żadaną w tezie. $\square$

Uwaga. W przypadku $E = \mathbb{K}^m$, $F = G = \mathbb{K}^n$ założenie to istnienie takiego odwzorowania $f : (\mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^n, (a, b)) \rightarrow \mathbb{K}^n$, że $\det \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_{m+j}} \right]_{i,j=1,\dots,n} \neq 0$. Badamy zbiór rozwiązań równania $f(x, y) = 0$ (równie dobrze można wybrać dowolną inną wartość). Przy założeniu istnienia jednego rozwiązania (szczególnie ustawionego względem „osi” y) dostajemy istnienie innych rozwiązań, których zbiór ma ładną strukturę.

Przykład. Rozważmy funkcję $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, poziomica $f(a, b) = 0$ to okrąg jednostkowy. Liczymy $\nabla f(a, b) = [2a, 2b]$, co nie równa się 0 na całym $f^{-1}(0)$, więc w dowolnym punkcie poziomicy można zastosować twierdzenie o funkcji uwikłanej. W $(a, b) = (1, 0)$ możemy popatrzeć tylko na wykres $x(y)$, w $(a, b) = (0, 1)$ tylko na $y(x)$, a w pozostałych punktach mamy oba wykresy $x(y)$ i $y(x)$.

Uwaga. Możliwości odwikłania zmiennych i przedstawienia poziomicy jako wykresu „determinuje” przeciwdziedzina – dla $f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ możemy liczyć na przedstawienie poziomicy jako wykresu funkcji $(y(x), z(x))$ lub $(x(y), z(y))$ lub $(x(z), y(z))$.

Przykład. Funkcja $f(x, y) = (y - g(x))^2$ z $g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ klasy $\mathcal{C}^1$ nie spełnia założeń twierdzenia o funkcji uwikłanej w $(0, 0)$, chociaż $f^{-1}(0)$ jest wykresem g .

Uwaga. Dowód twierdzenia o funkcji uwikłanej pozwala uzyskać g tej samej klasy, co f i to nawet w przypadku analitycznym: bez zmian dowodu mamy twierdzenie nad $\mathbb{C}$ i powołujemy się na twierdzenie, że $\mathbb{C}$ -analityczność to $\mathbb{C}$ -różniczkowalność. Nad $\mathbb{R}$ wykorzystując lemat Abela pokazujemy, że funkcja $\mathbb{R}$ -analityczna f na obszarze $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ przedłuża się jednoznacznie do funkcji $\mathbb{C}$ -analitycznej $\tilde{f}$ na otwartym $\tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{C}^n$ takim, że $\tilde{\Omega} \cap \mathbb{R}^n = \Omega$. Wobec związku między $d_a^{\mathbb{R}} f$ i $d_a^{\mathbb{C}} \tilde{f}$ możemy zastosować twierdzenie o funkcji uwikłanej dla $\tilde{f}$.

Uwaga. Zbiór $f^{-1}(0)$ może być dość dowolny nawet dla funkcji klasy $\mathcal{C}^\infty$. Istnieje twierdzenie Whitney’ego mówiące, że dla dowolnego zbioru domkniętego $A \subseteq \mathbb{R}^n$ istnieje funkcja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^\infty$ taka, że $f^{-1}(0) = A$.

Uwaga. Twierdzenie o funkcji uwikłanej uzyskaliśmy z twierdzenia o lokalnym dyfeomorfizmie. Z twierdzenia o funkcji uwikłanej można wywnioskować twierdzenie o lokalnym dyfeomorfizmie: weźmy $f : \Omega \rightarrow F$, gdzie $\Omega \in \text{top } E$ i f jest klasy $\mathcal{C}^1$ oraz $a \in \Omega$ takie, że $d_a f \in \text{Isom}(E, F)$. Rozważmy $h(x, y) = y - f(x)$ określoną na $\Omega \times F$, której zbiór zer jest wykresem f . Do tego $\frac{\partial h}{\partial x}(a, f(a)) = -d_a f$, co jest izomorfizmem. Zatem mamy funkcję $g : V \rightarrow U$ (gdzie U, V to odpowiednie otoczenia) taką, że $g = (f|_U)^{-1}$ i g jest odpowiedniej klasy, co daje nam tezę.

Twierdzenie 29. Niech E, F, G będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$. Niech $\Omega \in \text{top}(E \times F)$ oraz niech $f : \Omega \ni (x, y) \rightarrow f(x, y) \in G$ będzie klasy $\mathcal{C}^1$. Ustalmy $(a, b) \in f^{-1}(0)$. Zakładamy, że $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \in \text{Isom}(F, G)$. W takiej sytuacji istnieją otoczenia $a \in U \subseteq E$, $b \in V \subseteq F$ oraz odwzorowanie $g : U \rightarrow V$ klasy $\mathcal{C}^1$ takie, że $U \times V \subseteq \Omega$ oraz $(x, y) \in U \times V \cap f^{-1}(0) \iff y = g(x)$, do tego różniczka funkcji g dla dowolnego $x \in U$ dana jest wzorem $d_x g = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))$, w szczególności $\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))$ jest izomorfizmem.

Dowód. Z twierdzenia o funkcji uwikłanej mamy istnienie funkcji g . Niech $T : U \ni x \rightarrow f(x, g(x)) \in G$. Mamy $T \equiv 0$, czyli $T' \equiv 0$. Do tego $T = f \circ (\text{id}_U, g)$, więc

$$\begin{aligned} 0 = d_x T &= d_{(x, g(x))} f \circ (\text{id}_E, d_x g) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) \circ p_E + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \circ p_F \right] \circ (\text{id}_E, d_x g) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \circ d_x g \implies d_x g = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)). \end{aligned}$$

Pozostaje pokazać, że $\frac{\partial f}{\partial y}$ faktycznie możemy odwrócić. Na pewno mamy $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \in \text{Isom}(F, G)$, ale ten zbiór jest otwarty, co wobec ciągłości $\frac{\partial f}{\partial y}$ daje nam, że istnieją takie otoczenia $a \in \tilde{U} \subseteq U$ oraz $b \in \tilde{V} \subseteq V$, że $\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{U} \times \tilde{V}) \subseteq \text{Isom}(F, G)$. Zatem teza zachodzi na $\tilde{U} \times \tilde{V}$, a można zacieśnić U i V do $\tilde{U}$ i $\tilde{V}$ bez straty pożądanych własności g . $\square$

Przykład. Rozważmy $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie $\Omega \in \text{top } \mathbb{R}^n$, $f(a) = 0$ i $m \leq n$.

Badamy układ równań $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$. Załóżmy, że macierz $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right]_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$ ma po ewentualnej permutacji zmiennych minor główny $\det \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right]_{i,j=1, \dots, m} \neq 0$. W takiej sytuacji różniczka cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial(x_1, \dots, x_m)}(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ jest izomorfizmem i w otoczeniu punktu a zbiór rozwiązań rozważanego układu równań jest wykresem funkcji $(x_1, \dots, x_m) = g(x_{m+1}, \dots, x_n)$, czyli jest powierzchnią m -wymiarową.

Przykład. Twierdzenie o funkcji uwikłanej daje możliwość badania przebiegu zmienności funkcji uwikłanej. Rozważmy równanie $3y^5 + y(x^2 + 1) = 4x$. Punkt $(0, 0)$ jest rozwiązaniem. Rozważmy $f(x, y) = 3y^5 + y(x^2 + 1) - 4x$. Mamy $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 15y^4 + (x^2 + 1) > 0$, czyli względem y mamy funkcję silnie rosnącą. Jest to wielomian stopnia nieparzystego względem y , a więc równanie $f(x_0, y) = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $y(x_0)$ dla każdego x_0 , a nieparzyste stopnie przy y implikują $f(-x, -y(x)) = -f(x, y(x))$, czyli $y(-x) = -y(x)$. Twierdzenie o funkcji uwikłanej daje nam klasę C^1 tej funkcji, możemy policzyć $\frac{d}{dx}(3y(x)^5 + y(x)(x^2 + 1) - 4x) = 15y(x)^4 y'(x) + y'(x)(x^2 + 1) + y(x)2x - 4 = 0$. Możemy przekształcić $y'(x)(15y(x)^4 + x^2 + 1) = 4 - 2xy(x)$, więc $y'(x) = 0 \iff xy(x) = 2$. Mamy $0 = f(x, y(x))y(x)$, co przy $xy(x) = 2$ przekształca się do $3t^3 + t - 4 = 0$ dla $t = y(x)^2$, czego jedynym rozwiązaniem jest $t = 1$. Ostatecznie pochodna $y(x)$ zeruje się dla $y(x) = \pm 1$, czyli przy $x = \pm 2$. To daje nam ekstrema funkcji $y(x)$, a $y(x) = \frac{4x}{3y(x)^4 + x^2 + 1} \rightarrow 0$ daje nam zachowanie funkcji w granicy.

Przykład. Możemy stosować twierdzenie o funkcji uwikłanej do badania pierwiastków wielomianów. Niech $X = \{(a_1, \dots, a_m, t) \in \mathbb{K}^m \times \mathbb{K} : p(a, t) = t^m + a_1 t^{m-1} + \dots + a_m = 0\}$. W punktach $(a_0, t_0) \in X$ takich, że $\frac{\partial p}{\partial t}(a_0, t_0) \neq 0$ kielek funkcji $(X, (a_0, t_0))$ jest wykresem $t = t(a)$ funkcji klasy C^1 , czyli pierwiastki są zależne od współczynników w sposób zadany przez funkcję klasy C^1 .

13. Różniczki wyższych rzędów

2025-11-06

Definicja 16. Izometrią nazywamy takie odwzorowanie $\varphi : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$, które zachowuje odległość: $\rho(\varphi(x), \varphi(x')) = d(x, x')$. W szczególności izometria zawsze jest iniekcją 1-lipschitzowską. Jeśli istnieje surjektywna izometria $\varphi : X \rightarrow Y$, to mówimy, że te przestrzenie są izometryczne.

Uwaga. Ograniczymy się dalej do przestrzeni unormowanych E, F oraz izometrii liniowych $\varphi : E \rightarrow F$, czyli takich, że $\|\varphi(x)\| = \|x\|$.

Twierdzenie 30 (Mazur, Ulam). Izomorfizm izometryczny przestrzeni unormowanych nad $\mathbb{R}$ jest afiniczny, czyli $x \rightarrow \varphi(x) - \varphi(0)$ jest liniowe.

Przykład. Rozważmy surjektywną izometrię liniową $I : E \rightarrow F$, gdzie E, F są przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$. Skoro $I \in \mathcal{L}(E, F)$, to możemy obliczyć jej normę $\|I\|$. Dla $E = \{0\}$ mamy $\|I\| = 0$. W przeciwnym wypadku wobec $\|Ix\| = \|x\|$ mamy $\|I\| \leq 1$. Podobnie dla funkcji I^{-1} mamy $\|I^{-1}\| \leq 1$. Ponadto $\|x\| = \|I^{-1}Ix\| \leq \|I^{-1}\| \|Ix\|$, więc mamy

$$\frac{1}{\|I^{-1}\|} \|x\| \leq \|Ix\| \leq \|I\| \|x\|,$$

skąd $\|I^{-1}\| \|I\| \geq 1$, czyli $\|I^{-1}\| = \|I\| = 1$.

Lemat 3. Niech E, F będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$. Niech $I : E \rightarrow F$ będzie izomorfizmem topologicznym takim, że $\|I\| \leq 1$ oraz $\|I^{-1}\| \leq 1$. W takiej sytuacji I jest izometrią.

Dowód. Mamy $\|Ix\| \leq \|I\| \|x\| \leq \|x\|$ oraz $\|x\| = \|I^{-1}Ix\| \leq \|I^{-1}\| \|Ix\| \leq \|Ix\|$. Zatem $\|x\| = \|Ix\|$, a więc I jest izometrią. $\square$

Propozycja 17. Niech F będzie przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{K}$, $m \geq 1$. Odwzorowania

$$I : \mathcal{L}_m(\mathbb{K}, F) \ni f \rightarrow f(1, \dots, 1) \in F,$$

$$J : F \ni v \rightarrow (\mathbb{K}^m \ni (x_1, \dots, x_m) \rightarrow x_1 \dots x_m v \in F) \in \mathcal{L}_m(\mathbb{K}, F)$$

są wzajemnie odwrotnymi izometriami liniowymi. Zatem $\mathcal{L}_m(\mathbb{K}, F) \simeq F$.

Dowód. $J(v)$ jest m -liniowe na skończenie wymiarowej przestrzeni $\mathbb{K}^m$, więc jest ciągłe. Widać, że $\|J(v)\| \leq v$, więc $\|J\| \leq 1$. Ponadto dla $f \in \mathcal{L}_m(\mathbb{K}, F)$ mamy $\|f(1, \dots, 1)\| \leq \|f\|$, stąd $\|I\| \leq 1$. To daje nam tezę. $\square$

Propozycja 18. Niech E_1, E_2, F_1, F_2 będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$, $\Phi : E_1 \rightarrow E_2$ i $\Psi : F_1 \rightarrow F_2$ izometriami liniowymi. Odwzorowanie $I : \mathcal{L}(E_1, F_1) \ni f \rightarrow \Psi \circ f \circ \Phi^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, F_2)$ i jego odwzorowanie odwrotne $J(g) = \Psi^{-1} \circ g \circ \Phi$ są izometriami.

Dowód. Oczywiście I i J są liniowe. Mamy $\|I(f)\| \leq \|\Psi\| \|f\| \|\Phi^{-1}\| \leq \|f\|$, więc I jest ciągłe oraz $\|I\| \leq 1$. Podobnie dla J , więc mamy tezę. $\square$

Propozycja 19. Niech $E_1, \dots, E_m, F$ będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$ ($m \geq 2$). Odwzorowanie $I : \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, \dots, E_m; F)) \rightarrow \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$ dane wzorem

$$I(f) = (E_1 \times \dots \times E_m \ni (x_1, \dots, x_m) \rightarrow f(x_1) \cdot (x_2, \dots, x_m) \in F)$$

jest izomorfizmem izometrycznym.

Dowód. $\|f(x_1) \cdot (x_2, \dots, x_m)\| \leq \|f(x_1)\| \|x_2\| \dots \|x_m\| \leq \|f\| \|x_1\| \|x_2\| \dots \|x_m\|$. Z tego mamy $\|I\| \leq 1$ oraz widzimy, że $I(f)$ faktycznie jest ciągłe.

Odwrotne do I jest $J(g) = (E_1 \ni x_1 \rightarrow g(x_1, \cdot, \dots, \cdot) \in \mathcal{L}(E_2, \dots, E_m; F))$. Liniowość jest oczywista, ciągłość wynikowego odwzorowania dostajemy tak samo jak przedtem: $\|g(x_1, \dots, x_m)\| \leq \|g\| \|x_1\| \dots \|x_m\|$, skąd $\|g(x_1, \cdot, \dots, \cdot)\| \leq \|g\| \|x_1\|$, co daje też $\|J\| \leq 1$. $\square$

Propozycja 20. Niech $E_1, \dots, E_m, F$ będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$ ($m \geq 2$). Odwzorowanie

$$I : \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, \mathcal{L}(E_3, \dots, \mathcal{L}(E_m, F)))) \rightarrow \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$$

zadane przez $I(f)(x_1, \dots, x_m) = (\dots ((f(x_1) \cdot x_2) \cdot x_3) \dots) \cdot x_m \in F$ jest izomorfizmem izometrycznym.

Dowód. Już wiemy, że $\mathcal{L}(E_{m-1}, \mathcal{L}(E_m, F)) \simeq \mathcal{L}(E_{m-1}, E_m; F)$ oraz, że możemy zamieniać dziedziny i przeciwdziedziny na izomeryczne, zachowując izomorfizm przestrzeni odwzorowań liniowych między nimi. Indukcyjnie dostajemy tezę. $\square$

Uwaga. Różniczki wyższych rzędów w naturalny sposób są odwzorowaniami wieloliniowymi. Rozważmy różniczkowalne $f : U \rightarrow F$. Dostajemy $f' : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$. Jeśli to odwzorowanie jest różniczkowalne, to dostajemy odwzorowanie pochodne $f'' = (f')' : U \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)) \simeq \mathcal{L}_2(E; F)$. Ponadto w przypadku odwzorowań wieloliniowych na $\mathbb{K}^m$ mamy identyfikację z elementami F (co pokrywa się z teorią wprowadzoną nad ciałem). Do tego wiemy, że wszystkie rozważane przestrzenie są Banacha, więc możemy bez obaw stosować całą wprowadzoną teorię.

Definicja 17. Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $A \subseteq E$, $f : A \rightarrow F$, $a \in A$. Niech:

1. $A^{(0)} = A$, $f^{(0)} = f$,
2. $A^{(1)} = \{x \in A^{(0)} : f^{(0)} \text{ różniczkowalna w } x\} \subseteq \text{int } A^{(0)}$, $f^{(1)} = (f^{(0)})' : A^{(1)} \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$
3. $A^{(2)} = \{x \in A^{(1)} : f^{(1)} \text{ różniczkowalna w } x\} \subseteq \text{int } A^{(1)}$, $f^{(2)} = (f^{(1)})' : A^{(2)} \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$
4. $\vdots$
- n. $A^{(n)} = \{x \in A^{(n-1)} : f^{(n-1)} \text{ różniczkowalna w } x\} \subseteq \text{int } A^{(n-1)}$, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})' : A^{(n)} \rightarrow$

$$\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, \dots, \mathcal{L}(E, F)))$$

Dostajemy ciąg zbiorów (być może pustych od pewnego momentu) takich, że $A = A^{(0)} \supseteq \text{int } A^{(0)} \supseteq A^{(1)} \supseteq \dots$. Wprowadzone odwzorowania $f^{(n)}$ są takie, że każde jest odwzorowaniem pochodnym poprzedniego (lub odwzorowaniem pustym, gdy poprzednie nie jest różniczkowalne).

Definicja 18. Niech $n \in \mathbb{N}_+$. Jeśli $a \in A^{(n)}$, to mówimy, że f jest n -krotnie różniczkowalne w a , natomiast wartość $f^{(n)}(a) =: d_a^n f$ nazywamy n -tą różniczką (Frécheta) lub pochodną f w a . Odwzorowanie $f^{(n)} : A^{(n)} \rightarrow \mathcal{L}_n(E; F)$ (po odpowiedniej identyfikacji) zwiemy n -tym odwzorowaniem pochodnym.

Notacja. Aż do $n = 3$ stosujemy klasyczny zapis $f' := f^{(1)}$, $f'' := f^{(2)}$, $f''' := f^{(3)}$.

Definicja 19. Jeśli $n \geq 1$ i $A^{(n)} = A$, to mówimy, że $f : A \rightarrow F$ jest n -krotnie różniczkowalna.

Definicja 20. Odwzorowanie f jest klasy $\mathcal{C}^n$, gdy $A^{(n)} = A$ oraz $f^{(n)} : A \rightarrow \mathcal{L}_n(E; F)$ jest ciągłe.

Uwaga. Klasa $\mathcal{C}^0$ oznacza ciągłość f . Oczywiście klasa $\mathcal{C}^n$ implikuje klasę $\mathcal{C}^k$ dla $k \leq n$.

Definicja 21. Odwzorowanie f jest klasy $\mathcal{C}^\infty$, jeśli jest klasy $\mathcal{C}^n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$.

Uwaga. Jeśli $f : A \rightarrow F$ jest takie, że $f = L|_A$, a $L : E \rightarrow F$ jest afiniczne, to f jest klasy $\mathcal{C}^\infty$.

Uwaga. Załóżmy, że $f : A \rightarrow F$ jest n -krotnie różniczkowalne w $a \in A$. Mamy utożsamienie $d_a^n f = f^{(n)}(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, \dots, \mathcal{L}(E, F))) \simeq \mathcal{L}_n(E; F)$. Wymiennie piszemy więc $f^{(n)}(a)(h_1, \dots, h_n) = (\dots((f^{(n)}(a).h_1).h_2).h_3 \dots).h_n$, gdzie $h_1, \dots, h_n \in E$. Dodatkowo jeśli $E = \mathbb{K}$, to wiemy, że $\mathcal{L}_n(\mathbb{K}, F) \simeq F$, czyli możemy pisać $f^{(n)}(a) \in F$.

Uwaga. Jeśli $f : A \rightarrow F$ jest dwukrotnie różniczkowalne w a , to nie dość, że $a \in \text{int } A$, ale wobec $a \in A^{(2)}$ mamy otoczenie $a \in U \subseteq A$ takie, że $\forall x \in U \exists f'(x)$.

Definicja 22. Jeśli dla każdego $h \in E$ odwzorowanie $f_{a,h} : \mathbb{K} \ni t \rightarrow f(a + th) \in F$ jest n -krotnie różniczkowalne w $t = 0$ oraz istnieje symetryczne $L \in \mathcal{L}_n(E; F)$ takie, że $\frac{d^n f_{a,h}}{dt^n}(0) = L(h, \dots, h)$ (symetryczność oznacza niezmienniczość na permutacje argumentów), to mówimy, że f ma w a n -tą różniczkę Gâteaux. Oznaczamy $L = \delta_a^n f$.

Definicja 23. Niech $E_1, \dots, E_m, F$ będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$ ($m \geq 2$). Ustalmy $A \subseteq E_1 \times \dots \times E_m$, $f : A \rightarrow F$. Niech $A^{(0)} = A$. Działamy indukcyjnie:

Dla $i_1 \in \{1, \dots, m\}$ niech

$$A_{i_1}^{(1)} = \left\{ x \in A^{(0)} : \exists \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(x) \right\}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} : A_{i_1}^{(1)} \ni x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(x) \in \mathcal{L}(E_{i_1}, F).$$

Dla $i_2 \in \{1, \dots, m\}$ niech

$$A_{i_1, i_2}^{(2)} = \left\{ x \in A_{i_1}^{(1)} : \exists \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right)(x) \right\},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} : A_{i_1, i_2}^{(2)} \ni x \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right)(x) \in \mathcal{L}(E_{i_2}, \mathcal{L}(E_{i_1}, F)).$$

Dla $i_n \in \{1, \dots, m\}$ niech

$$A_{i_1, \dots, i_n}^{(n)} = \left\{ x \in A_{i_1, \dots, i_{n-1}}^{(n-1)} : \exists \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}} \right) (x) \right\},$$

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \dots \partial x_{i_1}} : A_{i_1, \dots, i_n}^{(n)} \ni x \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}} \right) (x) \in \mathcal{L}(E_{i_n}, \mathcal{L}(E_{i_{n-1}}, \dots, \mathcal{L}(E_{i_1}, F))).$$

Definicja 24. Jeśli $a \in A_{i_1, \dots, i_n}^{(n)}$, to $\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \dots \partial x_{i_1}}(a)$ nazywamy n -tą różniczką (pochodną) cząstkową f w a względem (po) $x_{i_n}, \dots, x_{i_1}$, gdzie $n \geq 1, i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m\}$. Liczbę n nazywamy rzędem pochodnej cząstkowej. Ponadto jeśli $i_n = i_{n-1} = \dots = i_1 = i$, to stosujemy zapis $\frac{\partial^n f}{\partial x_i^n} \in \mathcal{L}_n(E_i, F)$.

Uwaga. Często dla wygody odwraca się kolejność indeksowania, to znaczy pisząc $\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}$ mamy na myśli różniczkowanie kolejno po $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$.

Twierdzenie 31. Niech $E_1, \dots, E_m, F$ będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$ ($m \geq 2$). Niech $E = E_1 \times \dots \times E_m$, $A \subseteq E$ i niech $f : A \rightarrow F$ będzie n -krotnie różniczkowalna w punkcie a . Odwzorowanie f posiada wszystkie pochodne cząstkowe rzędu n w punkcie a . Do tego po naturalnych utożsamieniach zachodzą wzory

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}(a) = d_a^n f \circ (u_{i_1} \times \dots \times u_{i_n}),$$

$$d_a^n f = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^m \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}(a) \circ (p_{i_1} \times \dots \times p_{i_n}).$$

Dowód. Zauważmy, że drugi wzór implikuje pierwszy, bo tylko złożenie rzutowania $(p_{i_1} \times \dots \times p_{i_n})$ z zanurzeniem $(u_{i_1} \times \dots \times u_{i_n})$, gdzie indeksy się zgadzają, nie ma ani jednej współrzędnej zerowej (a ta automatycznie zerowałaby odpowiedni składnik sumy).

Drugiego wzoru dowodzimy indukcyjnie. Bazę już mamy. W kroku indukcyjnym z założenia indukcyjnego mamy otoczenie $a \in U \subseteq A$, w którym istnieją $\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}}$ oraz dla każdego $x \in U$ mamy

$$d_x^{n-1} f = \sum_{i_2, \dots, i_n=1}^m \left(T_{i_2, \dots, i_n} \circ \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}} \right),$$

gdzie $T_{i_2, \dots, i_n} : \mathcal{L}(E_{i_2}, \mathcal{L}(E_{i_3}, \dots, \mathcal{L}(E_{i_n}, F))) \rightarrow \mathcal{L}(E, \dots, \mathcal{L}(E, F))$ dane jest wzorem

$$\left(\dots \left(\left(T_{i_2, \dots, i_n}(\varphi) \cdot h^{(2)} \right) \cdot h^{(3)} \right) \dots \right) \cdot h^{(n)} = \left(\dots \left(\left(\varphi \cdot h_{i_2}^{(2)} \right) \cdot h_{i_3}^{(3)} \right) \dots \right) \cdot h_{i_n}^{(n)},$$

a więc jest liniowe i ciągłe. W związku z tym możemy zróżniczkować i otrzymać

$$\begin{aligned} d_a^n f &= \sum_{i_2, \dots, i_n=1}^m T_{i_2, \dots, i_n} \circ d_a \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}} \right) = \\ &= \sum_{i_2, \dots, i_n=1}^m T_{i_2, \dots, i_n} \circ \sum_{i_1=1}^m \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}} \right) (a) \circ p_{i_1} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^m T_{i_2, \dots, i_n} \circ \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}(a) \circ p_{i_1} = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^m T_{i_1, \dots, i_n} \circ \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}(a). \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 32. Niech $E_1, \dots, E_m, F$ będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$ ($m \geq 2$), niech $\Omega \in \text{top } E_1 \times \dots \times E_m$, $f : \Omega \rightarrow F$. Funkcja f jest klasy $\mathcal{C}^n$ w Ω wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej pochodne cząstkowe rzędu n istnieją i są ciągłe w Ω .

Dowód. ($\Rightarrow$) Wiemy już, że istnieją, a z ich postaci wynika ciągłość.

($\Leftarrow$) Zastosujemy indukcję po n . Dla $n = 1$ tezę już mamy. Niech g będzie pochodną cząstkową rzędu $n - 1$ funkcji f . Z założenia g ma w Ω ciągle pochodne cząstkowe $\frac{\partial g}{\partial x_i}$. Z tego wynika, że g jest klasy $\mathcal{C}^1$ w Ω . W szczególności g jest ciągła i f jest klasy $\mathcal{C}^{n-1}$ (na podstawie założenia indukcyjnego). Ze wzoru $f^{(n-1)}(x) = \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}=1}^m \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{n-1}}}(x) \circ (p_{i_1} \times \dots \times p_{i_{n-1}})$ widzimy, że $f^{(n-1)}$ jest klasy $\mathcal{C}^1$, co ostatecznie daje klasę $\mathcal{C}^n$ funkcji f . $\square$

Uwaga. Weźmy $E_1, \dots, E_m, F$ będące przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$ i funkcję $f : A \rightarrow F$ dwukrotnie różniczkowalną w $a \in A \subseteq E_1 \times \dots \times E_m$. Wtedy

$$d_a^2 f.(h, k) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot (h_i, k_j) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot h_i \right) \cdot k_j,$$

a to odpowiada „mnożeniu macierzy”:

$$[k_1 \dots k_m] \cdot \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right]_{i,j=1, \dots, m} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}.$$

Jeśli $E_1 = \dots = E_m = \mathbb{K}$, to macierz $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right]_{i,j=1, \dots, m}$ ma współczynniki z F i mnożenie polega na mnożeniu elementów F przez skalary. Dodatkowo dla $F = \mathbb{K}$ mamy do czynienia ze zwykłym mnożeniem macierzy. Macierz tę nazywamy macierzą Hessego, a jej wyznacznik to hesjan.

14. Symetria różniczek

2025-11-07

Twierdzenie 33 (Schwarz). Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $a \in A \subseteq E$ i niech $f : A \rightarrow F$ będzie dwukrotnie różniczkowalna w a . Wtedy $d_a^2 f \in \mathcal{L}_2(E; F)$ jest odwzorowaniem symetrycznym, czyli $d_a^2 f(h, k) = d_a^2 f(k, h)$.

Dowód. Znajdujemy takie $r > 0$, że $K(a, r) \subseteq A$ i dla każdego $x \in K(a, r)$ istnieje $d_x f$. Dla $(u, v) \in K(0, r) \times K(0, r)$ definiujemy

$$H(u, v) = f(a + u + v) - f(a + u) - f(a + v) + f(a) - d_a^2 f.(u, v).$$

Wiemy, że f' jest różniczkowalna w a , więc mamy $K(a, 2\delta) \subseteq K(a, r)$ takie, że dla $x \in K(a, 2\delta)$ jest $\|f'(x) - f'(a) - f''(a) \cdot (x - a)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|x - a\|$. Ustalmy $u \in K(0, \delta)$ i oznaczmy $g_u(v) = H(u, v)$. Jest to funkcja różniczkowalna w dowolnym $v \in K(0, \delta)$. Mamy

$$g'_u(v) = f'(a + u + v) - f'(a + v) - d_a^2 f.u,$$

zatem

$$\begin{aligned} & \|g'_u(v) \pm d_a^2 f.v \pm f'(a)\| \leq \\ & \|f'(a + u + v) - f'(a) - f''(a) \cdot (u + v)\| + \|f'(a + v) - f'(a) - f''(a) \cdot v\| \leq \\ & \frac{\varepsilon}{2} \|u + v\| + \frac{\varepsilon}{2} \|v\| \leq \varepsilon (\|u\| + \|v\|). \end{aligned}$$

Niech $h(v) = \varepsilon (\|u\| + \|v\|)$. Dla $x = tv$ przy $t \in [0, 1]$ mamy $h(x) = \varepsilon (\|u\| + t\|v\|) \leq h(v)$. Zatem $\|g'_u(x)\| \leq h(x) \leq h(v)$, czyli z twierdzenia o przyrostach

$$\|H(u, v)\| = \|g_u(v) - g_u(0)\| \leq h(v) \|v\| \leq \varepsilon (\|u\| + \|v\|)^2.$$

Ostatecznie dla $\varepsilon > 0$ znaleźliśmy $\delta > 0$ takie, że jeśli $\|u\|, \|v\| < \delta$, to

$$\|d_a^2 f.(u, v) - d_a^2 f.(v, u)\| = \|H(v, u) - H(u, v)\| \leq 2\varepsilon (\|u\| + \|v\|)^2.$$

Teraz dla $h, k \in E \setminus \{0\}$ wzięwszy $u = \frac{h}{\|h\|} \frac{\delta}{2}$ i $v = \frac{k}{\|k\|} \frac{\delta}{2}$ mamy $\left\| \frac{\delta^2}{4\|h\|\|k\|} (d_a^2 f(h, k) - d_a^2 f(k, h)) \right\| \leq 2\varepsilon\delta^2$, czyli $\|d_a^2 f(h, k) - d_a^2 f(k, h)\| \leq 8\|h\|\|k\|\varepsilon = \varepsilon'$, co kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 34. Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $a \in A \subseteq E$, niech $f : A \rightarrow F$ będzie n -krotnie różniczkowalna. Różniczka $d_a^n f$ jest symetryczna, to znaczy dla każdej permutacji $\sigma \in S_n$ mamy $d_a^n f(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(n)}) = d_a^n f(h_1, \dots, h_n)$ dla dowolnych $h_1, \dots, h_n \in E$.

Dowód. Dowodzimy indukcyjnie, dla $n = 2$ już mamy. Ustalamy $n \geq 3$. Wystarczy pokazać krok indukcyjny dla σ będącego transpozycją sąsiednich elementów.

Jeśli $\sigma(1) = 1$, to niech $g : A^{(n-1)} \ni x \rightarrow d_x^{n-1} f(h_2, \dots, h_n) - d_x^{n-1} f(h_{\sigma(2)}, \dots, h_{\sigma(n)})$, gdzie $h_1, \dots, h_n \in E$ są na wstępie ustalone. Na podstawie założenia indukcyjnego $g \equiv 0$, więc $d_a g \cdot h_1 = 0$. Oznaczając $h' = (h_2, \dots, h_n)$ wprowadzamy $\tilde{g} = v_{h'} \circ f^{(n-1)}$, gdzie $v_{h'}$ oznacza ewaluację na h' , która jest liniowa. Zatem $d_a \tilde{g} = v_{h'} \circ d_a f^{(n-1)} = v_{h'} \circ d_a^n f$. Analogicznie dla $h'' = (h_{\sigma(2)}, \dots, h_{\sigma(n)})$ wprowadzamy $\tilde{g}_2 = v_{h''} \circ f^{(n-1)}$, mamy $d_a \tilde{g}_2 = v_{h''} \circ d_a^n f$. Jest $g = \tilde{g} - \tilde{g}_2$, czyli $0 = d_a g \cdot h_1 = d_a \tilde{g} \cdot h_1 - d_a \tilde{g}_2 \cdot h_1 = (d_a^n f \cdot h_1) \cdot (h_2, \dots, h_n) - (d_a^n f \cdot h_1) \cdot (h_{\sigma(2)}, \dots, h_{\sigma(n)}) = d_a^n f(h_1, \dots, h_n) - d_a^n f(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(n)})$.

Jeśli $\sigma(1) = 2$, to $\sigma(2) = 1$ i $\sigma(i) = i$ dla $i > 2$. Wtedy $f^{(n-2)}$ jest dwukrotnie różniczkowalna w a , więc $d_a^2 f^{(n-2)}$ jest symetryczna. Ale $d_a^2 f^{(n-2)} = d_a^n f$, czyli $(d_a^n f \cdot h_1) \cdot h_2 = (d_a^n f \cdot h_2) \cdot h_1$, zatem obkładając pozostałymi argumentami dostajemy pożądaną równość dla σ . $\square$

Twierdzenie 35. Niech $A \subseteq \mathbb{K}^m$ dla $m \geq 2$, niech F będzie przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$. Weźmy $f : A \rightarrow F$, która jest n -krotnie różniczkowalna w $a \in A$. Wybierzmy $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m\}$ i $\sigma \in S_n$. Po identyfikacji różniczek cząstkowych z elementami F mamy $\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}(a) = \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}} \dots \partial x_{i_{\sigma(n)}}}(a)$.

Dowód. Mamy $\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}(a) = d_a^n f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$ i stosujemy twierdzenie o symetrii różniczki. $\square$

Przykład. Niech $f(x, y) = xy$. Wtedy

$$d_a^2 f((h_1, h_2), (k_1, k_2)) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = h_1 k_2 + h_2 k_1.$$

Uwaga. Symetria pochodnych cząstkowych jest warunkiem koniecznym różniczkowalności odpowiedniego rzędu.

Notacja. Gdy wiemy, że pochodne cząstkowe nie zależą od kolejności indeksów możemy zapisać

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}(a) = \frac{\partial^n f}{(\partial x_1 \dots \partial x_1) \dots (\partial x_m \dots \partial x_m)}(a) = \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}(a) =: \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a),$$

gdzie $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_+^m$ jest wielowskaźnikiem długości $n = |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$. Pojawiają się też oznaczenia $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a) = D^\alpha f(a) = \partial^\alpha f(a)$. Jeśli dodatkowo położymy $\alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_m!$, to wszystkich permutacji dających tę samą pochodną cząstkową w a jest $\frac{n!}{\alpha!}$.

15. Własności odwzorowań wielokrotnie różniczkowalnych

2025-11-13

Uwaga. Przypomnijmy, że odwzorowania afiniczne zacieśnione do zbioru otwartego są klasy $\mathcal{C}^\infty$ i mają zerowe pochodne stopnia większego niż 1.

Odwzorowanie dwuliniowe $f \in \mathcal{L}(E, F; G)$ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$, bo mamy $d_{(x,y)} f(h, k) = f(x, k) + f(h, y)$, czyli f' jest liniowe (na $E \times F$), czyli $f'' \equiv f'$ (odwzorowanie stałe, zawsze równe f') i $f''' \equiv 0$.

Jeśli A jest przemienną algebrą Banacha z jedyneką, to $\exp : A \rightarrow A$ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$ i mamy $\exp^{(n)} \cdot (h_1, \dots, h_n) = \exp(a) \cdot h_1 \cdot \dots \cdot h_n$.

Propozycja 21. Niech E, F, G będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $a \in A \subseteq E$ oraz niech $f : A \rightarrow F$ będzie n -krotnie różniczkowalna w a (klasy $\mathcal{C}^n$) [klasy $\mathcal{C}^\infty$]. Wtedy dla $L \in \mathcal{L}(F, G)$ odwzorowanie $L \circ f$ jest n -krotnie różniczkowalne (klasy $\mathcal{C}^n$) [klasy $\mathcal{C}^\infty$].

Dowód. Dla $n = 1$ twierdzenie jest znane. Pokażemy krok indukcyjny dla $n \geq 2$. f' jest $(n-1)$ -krotnie różniczkowalne w a , więc $\phi \circ f'$ jest $(n-1)$ -krotnie różniczkowalne, gdzie $\phi : \mathcal{L}(E, F) \ni \ell \rightarrow L \circ \ell \in \mathcal{L}(E, G)$. Teraz $(\phi \circ f')(x) = L \circ f'(x) = d_x(L \circ f)$, co oznacza, że $(L \circ f)'$ jest $(n-1)$ -krotnie różniczkowalne. To daje nam tezę w pierwszej wersji. Pozostałych wersji dowodzimy identycznie. To daje nam odpowiednie własności. $\square$

Twierdzenie 36. Niech $E, F_1, \dots, F_m$ będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $a \in A \subseteq E$. Niech $f_i : A \rightarrow F_i$ będzie n -krotnie różniczkowalne w a (klasy $\mathcal{C}^n$) [klasy $\mathcal{C}^\infty$]. Odwzorowanie $f = (f_1, \dots, f_m)$ jest n -krotnie różniczkowalne (klasy $\mathcal{C}^n$) [klasy $\mathcal{C}^\infty$].

Dowód. Mamy $f' = \phi \circ (f'_1, \dots, f'_m)$, gdzie

$$\phi : \prod_{i=1}^m \mathcal{L}(E, F_i) \ni (\ell_1, \dots, \ell_m) \rightarrow (\ell_1, \dots, \ell_m) \in \mathcal{L}(E, F_1 \times \dots \times F_m).$$

Tezę dla $n = 1$ mamy, pokazujemy krok indukcyjny dla $n > 1$. $(f'_1, \dots, f'_m)$ ma odpowiednią własność, natomiast ϕ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$, więc założenie jest spełnione dla $f' = \phi \circ (f'_1, \dots, f'_m)$. $\square$

Twierdzenie 37. Niech E, F, G będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $a \in A \subseteq E$, $f : A \rightarrow B \subseteq F$, $g : B \rightarrow G$. Oznaczmy $b = f(a)$. Jeśli f jest n -krotnie różniczkowalne w a , a g jest n -krotnie różniczkowalne w b , to $g \circ f$ jest n -krotnie różniczkowalne w a (odpowiednio mamy klasę $\mathcal{C}^n$ lub $\mathcal{C}^\infty$).

Dowód. Ponownie indukcja, dla $n = 1$ wynik jest znany. Mamy $(g \circ f)' = \phi \circ (g' \circ f, f')$, gdzie $\phi : \mathcal{L}(F, G) \times \mathcal{L}(E, F) \ni (u, v) \rightarrow u \circ v \in \mathcal{L}(E, G)$ jest dwuliniowe, więc klasy $\mathcal{C}^\infty$. $\square$

Uwaga. Korzystając z twierdzenia o złożeniach możemy dowodzić dalszych rezultatów tego typu, np. dla iloczynu kartezjańskiego.

Twierdzenie 38. Niech A będzie algebrą Banacha z jedyneką nad $\mathbb{K}$. Odwzorowanie $\xi : G(A) \ni x \rightarrow x^{-1} \in G(A)$ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$.

Dowód. Wiemy, że $d_x \xi \cdot h = -x^{-1} \cdot h \cdot x^{-1}$ i $\xi' = \phi \circ (-\xi, \xi)$, gdzie $\phi : A \times A \ni (x, y) \rightarrow (A \ni h \rightarrow x \cdot h \cdot y \in A) \in \mathcal{L}(A, A)$. ϕ jest dwuliniowe, więc klasy $\mathcal{C}^\infty$.

Wiemy, że ξ jest klasy $\mathcal{C}^1$, więc ξ' jest klasy $\mathcal{C}^1$, czyli ξ jest klasy $\mathcal{C}^2$. Możemy powtórzyć ten argument dowolnie wiele razy. $\square$

Twierdzenie 39. Niech E, F będą takimi przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, że $\text{Isom}(E, F) \neq \emptyset$. Rozważmy $\eta : \text{Isom}(E, F) \ni f \rightarrow f^{-1} \in \text{Isom}(F, E)$. η jest klasy $\mathcal{C}^\infty$.

Dowód. Ustalmy $\varphi \in \text{Isom}(F, E)$ i oznaczmy $\varphi_* : \mathcal{L}(E, F) \ni L \rightarrow L \circ \varphi \in \mathcal{L}(F, F)$ oraz $\varphi^* : \mathcal{L}(F, F) \ni L \rightarrow \varphi \circ L \in \mathcal{L}(F, E)$. Oba te odwzorowania są klasy $\mathcal{C}^\infty$. Mamy $\eta = \varphi^* \circ \xi \circ \varphi_*|_{\text{Isom}(E, F)}$, co jest złożeniem odwzorowań klasy $\mathcal{C}^\infty$. $\square$

Definicja 25. Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $U \in \text{top } E$, $V \in \text{top } F$. Dla $f : U \rightarrow V$ i $k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$ mówimy, że f jest $\mathcal{C}^k$ -dyfeomorfizmem, jeśli jest bijekcją klasy $\mathcal{C}^k$, której odwrotność również jest klasy $\mathcal{C}^k$.

Uwaga. Zwyczajny dyfeomorfizm jest $\mathcal{C}^1$ -dyfeomorfizmem.

Twierdzenie 40. Niech f będzie dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$. Wtedy f jest $\mathcal{C}^k$ -dyfeomorfizmem.

Dowód. Niech $g = f^{-1}$. Mamy $d_y g = (d_{g(y)} f)^{-1}$. Stąd wynika $g' = \eta \circ f' \circ g$, zatem jeśli f jest klasy $\mathcal{C}^2$, to g' jest klasy $\mathcal{C}^1$, czyli g jest klasy $\mathcal{C}^2$. Możemy powtórzyć ten argument dowolnie wiele razy (aż do $\mathcal{C}^k$). $\square$

Twierdzenie 41. Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, niech $a \in \Omega \in \text{top } E$ i $k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$. Ustalmy $f : \Omega \rightarrow F$ klasy $\mathcal{C}^k$ takie, że $d_a f \in \text{Isom}(E, F)$. Istnieją otoczenia $a \in U \subseteq \Omega$ i $f(a) \in V \subseteq F$ takie, że $f(U) = V$ oraz $f|_U : U \rightarrow V$ jest $\mathcal{C}^k$ -dyfeomorfizmem.

Dowód. Z twierdzenia o lokalnym dyfeomorfizmie wiemy, że $f|_U$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$ dla pewnego otoczenia U . Zatem $f|_U$ jest $\mathcal{C}^k$ -dyfeomorfizmem. $\square$

Twierdzenie 42. Niech E, F, G będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$. Niech $\Omega \in \text{top}(E \times F)$ oraz niech $f : \Omega \ni (x, y) \rightarrow f(x, y) \in G$ będzie klasy $\mathcal{C}^k$ dla ustalonego $k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$. Ustalmy $(a, b) \in f^{-1}(0)$. Zakładamy, że $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \in \text{Isom}(F, G)$. W takiej sytuacji istnieją otoczenia $a \in U \subseteq E$, $b \in V \subseteq F$ oraz odwzorowanie $g : U \rightarrow V$ klasy $\mathcal{C}^k$ takie, że $U \times V \subseteq \Omega$ oraz $(x, y) \in U \times V \cap f^{-1}(0) \iff y = g(x)$ (to znaczy $U \times V \cap f^{-1}(0)$ jest wykresem g).

Dowód. Powtarzamy dowód twierdzenia o funkcji uwikłanej, pojawia się w nim dyfeomorfizm klasy $\mathcal{C}^k$, więc jest to $\mathcal{C}^k$ -dyfeomorfizm. Druga współrzędna jego odwrotności jest klasy $\mathcal{C}^k$, a to jest właśnie g . $\square$

Uwaga. Oba powyższe twierdzenia zachodzą też dla $\mathcal{C}^\omega$.

16. Wzór Taylora

2025-11-14

Notacja. Dla $\varphi \in \mathcal{L}_k(E; F)$ piszemy $\varphi \cdot (h)^k := \varphi(\underbrace{h, \dots, h}_{k \text{ razy}})$.

Definicja 26. Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $a \in A \subseteq E$. Dla funkcji $f : A \rightarrow F$, która jest n -krotnie różniczkowalna w a n -tym wielomianem Taylora f w punkcie a nazywamy

$$T_a^n f(h) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \cdot (h)^k.$$

Notacja. Dalej ustalamy $U \in \text{top } \mathbb{R}$, przestrzeń Banacha F nad $\mathbb{K}$ i funkcję $v : U \rightarrow F$, która jest n -krotnie różniczkowalna. Będziemy rozważać funkcję

$$\varphi : U \ni t \rightarrow v(t) + \frac{1-t}{1!} v'(t) + \frac{(1-t)^2}{2!} v''(t) + \dots + \frac{(1-t)^n}{n!} v^{(n)}(t) \in F.$$

Lemat 4. Niech v będzie $(n+1)$ -krotnie różniczkowalna w U . Wtedy $\varphi'(t) = \frac{(1-t)^n}{n!} v^{(n+1)}(t)$ dla każdego $t \in U$.

Dowód.

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= v'(t) + \left[-v'(t) + \frac{1-t}{1!} v''(t) \right] + \left[-\frac{2(1-t)}{2!} v''(t) + \frac{(1-t)^2}{2!} v'''(t) \right] + \dots + \\ &\quad \left[-\frac{n(1-t)^{n-1}}{n!} v^{(n)}(t) + \frac{(1-t)^n}{n!} v^{(n+1)}(t) \right] = \frac{(1-t)^n}{n!} v^{(n+1)}(t). \end{aligned}$$

$\square$

Lemat 5. Niech v będzie $(n+1)$ -krotnie różniczkowalna w U . Niech $[0, 1] \subseteq U$ i niech $M \geq 0$ będzie takie, że dla każdego $t \in [0, 1]$ mamy $\|v^{(n+1)}(t)\| \leq M$. Wtedy $\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq \frac{M}{(n+1)!}$.

Dowód. Niech $g : U \ni t \rightarrow -M \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \in \mathbb{R}$. Na $[0, 1]$ mamy $g'(t) = M \frac{(1-t)^n}{n!}$, zatem z założenia $\|\varphi'(t)\| = \frac{(1-t)^n}{n!} \|v^{(n+1)}(t)\| \leq g'(t)$. Z tego wynika $\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq g(1) - g(0) = \frac{M}{(n+1)!}$. $\square$

Lemat 6. Niech v będzie klasy $\mathcal{C}^{n+1}$ i niech $[0, 1] \subseteq U$. Wtedy $\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} v^{(n+1)}(t) dt$.

Dowód. Wiemy już, że φ jest funkcją pierwotną funkcji całkowanej. Teza zachodzi z definicji całki oznaczonej. $\square$

Uwaga. Jeśli E, F są przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $a \in \Omega \subseteq E$, $h \in E$ i $[a, a+h] \subseteq \Omega$ oraz funkcja $f : \Omega \rightarrow F$ jest k -krotnie różniczkowalna, to dla $v(t) = f(a+th)$ zdefiniowanego na $U = \{t \in \mathbb{R} : a+th \in \Omega\}$ mamy $d_t v = d_{a+th} f \cdot h \in F$, zatem można utożsamić $v'(t) = d_{a+th} f \cdot h$. Różniczkując wielokrotnie dostaniemy $v^{(k)}(t) = f^{(k)}(a+th) \cdot (h)^k$.

Twierdzenie 43 (O wielomianie Taylora z resztą Lagrange'a). Niech rozważana funkcja f będzie $(n+1)$ -krotnie różniczkowalna w Ω oraz niech $M \geq 0$ będzie takie, że $\|f^{(n+1)}(x)\| \leq M$ dla $x \in [a, a+h]$. Wtedy $\|f(a+h) - T_a^n f(h)\| \leq \frac{M}{(n+1)!} \|h\|^{n+1}$.

Dowód. Funkcja $v(t) = f(a+th)$ jest $(n+1)$ -krotnie różniczkowalna w U . Mamy

$$\|v^{(n+1)}(t)\| = \|f^{(n+1)}(a+th) \cdot (h)^{n+1}\| \leq \|f^{(n+1)}(a+th)\| \|h\|^{n+1} \leq M \|h\|^{n+1},$$

zatem $\|f(a+h) - T_a^n f(h)\| = \|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq \frac{M \|h\|^{n+1}}{(n+1)!}$. $\square$

Twierdzenie 44 (O wielomianie Taylora z resztą całkową). Niech rozważana funkcja f będzie klasy $\mathcal{C}^{n+1}$ w Ω . Wtedy $f(a+h) = T_a^n f(h) + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+th) \cdot (h)^{n+1} dt$.

Dowód. Mamy $f(a+h) - T_a^n f(h) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} v^{(n+1)}(t) dt$, a to jest równe temu, co trzeba. $\square$

Twierdzenie 45 (O wielomianie Taylora z resztą Peany). Niech $a \in \Omega \in \text{top } E$ i niech $f : \Omega \rightarrow F$ będzie n -krotnie różniczkowalna w a . Wtedy $f(a+h) = T_a^n f(h) + o(\|h\|^n)$ przy $h \rightarrow 0$.

Dowód. Przeprowadzimy indukcję po n . W bazie dla $n=1$ dostajemy definicję różniczkowalności: $f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + o(\|h\|)$. Pokażemy krok indukcyjny dla $n \geq 2$.

Rozważmy funkcję $R : (\Omega - a) \ni h \rightarrow f(a+h) - T_a^n f(h)$. Mamy $R(0) = 0$ i możemy zróżniczkować R , bo z $n \geq 2$ mamy, że f da się chociaż raz zróżniczkować w pewnym otoczeniu a . Zauważmy, że składniki sumowane w $T_a^n f(h)$ są postaci $F_k = f^{(k)}(a) \circ \delta_k$, gdzie $\delta_k(h) = (h)^k = (h, \dots, h)$. Mamy

$$\begin{aligned} d_h F_k \cdot \bar{h} &= d_{(h)^k} f^{(k)}(a) \circ \delta_k \cdot \bar{h} = d_{(h)^k} f^{(k)}(a) \cdot (\bar{h})^k = \\ &= \sum_{i=1}^k f^{(k)}(a) \cdot (h, \dots, \underbrace{\bar{h}}_i, \dots, h) = k \cdot (f')^{(k-1)}(h)^{k-1} \cdot \bar{h}, \end{aligned}$$

gdzie trzecie przejście to różniczka odwzorowania k -liniowego, a ostatnie to skorzystanie z symetrii pochodnych. Zatem

$$R'(h) = f'(a+h) - f'(a) - \frac{1}{2!} \cdot 2(f')'(h) - \dots - \frac{1}{n!} \cdot n(f')^{(n-1)}(h)^{n-1},$$

czyli z założenia indukcyjnego $R'(h) = o(\|h\|^{n-1})$. Znaczy to, że dla $\varepsilon > 0$ i odpowiedniego $\delta > 0$ mamy $\|h\| < \delta \implies \|R'(h)\| \leq \varepsilon \|h\|^{n-1}$. Zatem z twierdzenia o przyrostach mamy $\|R(h)\| = \|R(h) - R(0)\| \leq \varepsilon \|h\|^{n-1} \|h\|$, co kończy dowód. $\square$

Uwaga. W przypadku $E = \mathbb{K}^m$ chcielibyśmy wyrazić wielomian Taylora za pomocą pochodnych cząstkowych, które utożsamiają się z elementami F . Dla $h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{K}^m$ mamy

$$f^{(k)}(a) \cdot (h)^k = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^m \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) h_{i_1} \cdot \dots \cdot h_{i_k} = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^m \\ |\alpha|=k}} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(a) \cdot h^\alpha,$$

gdzie czynnik $\frac{k!}{\alpha!}$ jest liczbą permutacji indeksów dających tę samą pochodną. Zatem

$$f(a+h) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^m \\ |\alpha| \leq n}} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a) \cdot h^\alpha + o(\|h\|^n).$$

17. Wielomiany jednorodne i symetryczne

2025-12-04

Definicja 27. Niech V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad $\mathbb{K}$. Funkcja $\varphi : V \rightarrow W$ jest wielomianem jednorodnym stopnia $k \in \mathbb{N}$, gdy dla $k = 0$ mamy $\varphi \equiv \text{const}$, a dla $k \geq 1$ istnieje k -liniowe $\Phi : V^k \rightarrow W$ takie, że $\Phi \circ \Delta_k = \varphi$, gdzie $\Delta_k : V \ni x \rightarrow (x, \dots, x) \in V^k$. Ogół wielomianów jednorodnych stopnia k oznaczamy $Q_k(V, W)$.

Uwaga. $Q_k(V, W)$ jest przestrzenią wektorową, dla $\varphi \in Q_k(V, W)$ mamy $\varphi(\lambda x) = \lambda^k \varphi(x)$ dla $\lambda \in \mathbb{K}$ i $x \in V$ oraz $\varphi(0) = 0$ przy $k > 0$.

Przykład. Funkcja $\varphi : \mathbb{K} \ni x \rightarrow ax^k \in \mathbb{K}$ pochodzi od $\Phi : \mathbb{K}^k \ni (x_1, \dots, x_k) \rightarrow ax_1 \cdot \dots \cdot x_k \in \mathbb{K}$.

Funkcja $\varphi(x, y) = x^2y \in Q_3(\mathbb{K}^2, \mathbb{K})$ nie pochodzi od $\Phi(x, y, z) = xyz$, bo szukamy 3-liniowej funkcji $\Phi : (\mathbb{K}^2)^3 \rightarrow \mathbb{K}$, odpowiednia jest na przykład $\Phi((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) = x_1x_2y_1$. Gdybyśmy żądali symetrii Φ , to istnieje dokładnie jedna taka funkcja, w tym wypadku jest nią $\Phi = \frac{1}{3}(x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3)$.

Ogólnie dla $V = \mathbb{K}^m$ i $\varphi(x) = ax_1^{k_1} \dots x_m^{k_m}$ przy $k = k_1 + \dots + k_m$ działa

$$\Phi(x^{(1)}, \dots, x^{(k)}) = a \prod_{j_1=1}^{k_1} x_1^{(j_1)} \prod_{j_2=k_1+1}^{k_1+k_2} x_2^{(j_2)} \dots \prod_{j_m=k_1+\dots+k_{m-1}+1}^{k_1+\dots+k_m} x_m^{(j_m)}.$$

Notacja. Wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$\text{Hom}(V, W) = \{L : V \rightarrow W \mid L \text{ liniowe}\},$$

$$\text{Hom}_k(V, W) = \{\Phi : V^k \rightarrow W \mid \Phi \text{ } k\text{-liniowe}\},$$

$$\text{Hom}_k^{\text{sym}}(V, W) = \{\Phi \in \text{Hom}_k(V, W) \mid \Phi \text{ symetryczne}\},$$

$$\tilde{\Delta}_k : \text{Hom}_k(V, W) \ni \Phi \rightarrow \Phi \circ \Delta_k \in Q_k(V, W).$$

Lemat 7 (Uogólnione twierdzenie Cramera). Dla $A \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{K})$ takiej, że $\det A \neq 0$ rozważamy krotkę wektorów $v \in V^k \simeq \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{K})$ taką, że $Av = 0 \in V^k$. Wtedy $v = 0$.

Dowód. Niech $\mu \in V^*$ będzie pewnym funkcjonałem liniowym i niech $\hat{\mu} = \underbrace{\mu \times \dots \times \mu}_{k \text{ razy}}$. Wtedy

$$A\hat{\mu}(v) = \hat{\mu}(Av) = 0. \text{ Ustalmy } v = (v_1, \dots, v_k) \text{ oraz } A = \begin{bmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(k)} \end{bmatrix} \text{ przy } a^{(i)} \in \mathbb{K}^k. \text{ Zachodzi } Av =$$

$$\begin{bmatrix} \langle a^{(1)}, v \rangle \\ \vdots \\ \langle a^{(k)}, v \rangle \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \langle a^{(i)}, v \rangle = \sum_{j=1}^k a_j^{(i)} v_j \in V. \text{ To daje nam } \mu(\langle a^{(i)}, v \rangle) = \sum_{j=1}^k a_j^{(i)} \mu(v_j) =$$

$$\langle a^{(i)}, \hat{\mu}(v) \rangle, \text{ czyli } \hat{\mu}(Av) = \begin{bmatrix} \langle a^{(1)}, \hat{\mu}(v) \rangle \\ \vdots \\ \langle a^{(k)}, \hat{\mu}(v) \rangle \end{bmatrix} = A\hat{\mu}(v).$$

Do układu równań $A\hat{\mu}(v) = 0$ w $\mathbb{K}^k$ można stosować klasyczne twierdzenie Cramera – jedynym

rozwiązaniem jest $\hat{\mu}(v) = 0 \in \mathbb{K}^k$, czyli $\mu(v_1) = \dots = \mu(v_k) = 0$. Zauważmy, że ta równość zachodzi dla dowolnego funkcjonału $\mu \in V^*$. Z tego wynika $v_1 = \dots = v_k = 0$. $\square$

Uwaga. Dla $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K}$ macierzą Vandermonda nazywamy macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_1^{k-1} \\ 1 & t_2 & \dots & t_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_k & \dots & t_k^{k-1} \end{bmatrix}.$$

Jej wyznacznik, czasem zwany vandermondianem, wynosi $\prod_{1 \leq i < j \leq k} (t_j - t_i)$.

Twierdzenie 46. Niech V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad $\mathbb{K}$, $\varphi \in Q_k(V, W)$ dla $k \geq 1$. W takiej sytuacji istnieje dokładnie jedno $\Phi \in \text{Hom}_k^{\text{sym}}(V, W)$ takie, że $\Phi \circ \Delta_k = \varphi$. Inaczej mówiąc, $\hat{\Delta}_k|_{\text{Hom}_k^{\text{sym}}(V, W)}$ jest izomorfizmem na $Q_k(V, W)$.

Dowód. Dla $\sigma \in S_k$ niech $\pi_\sigma(v_1, \dots, v_k) = (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$. Rozważmy symetryzację zadaną przez $s : \text{Hom}_k(V, W) \ni \Phi \rightarrow \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \Phi \circ \pi_\sigma \in \text{Hom}_k^{\text{sym}}(V, W)$. Mamy $\pi_\sigma \circ \Delta_k = \Delta_k$, więc

$$s(\Phi) \circ \Delta_k = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \Phi \circ \pi_\sigma \circ \Delta_k = \frac{k!}{k!} \Phi \circ \Delta_k = \Phi \circ \Delta_k.$$

Zatem jeśli $\varphi = \Phi' \circ \Delta_k$, to $\varphi = s(\Phi') \circ \Delta_k$ i $s(\Phi') \in \text{Hom}_k^{\text{sym}}(V, W)$ jest odpowiednim odwzorowaniem. Pozostało wykazać jego jedyność. W tym celu wystarczy pokazać, że jeśli $\Phi \in \text{Hom}_k^{\text{sym}}(V, W)$ i $\Phi \circ \Delta_k \equiv 0$, to $\Phi \equiv 0$.

Dla $k = 1$ jest to oczywiste. Dla $k = 2$ weźmy $\Phi \in \text{Hom}_2^{\text{sym}}(V, W)$ takie, że $\Phi(x, x) = 0$ dla każdego $x \in V$. Wtedy dla $x, y \in V$ jest $0 = \Phi(x + y, x + y) = 2\Phi(x, y)$. Zatem $\Phi(x, y) = 0$.

Pokażemy krok indukcyjny dla $k+1$. Ustalmy $\Phi \in \text{Hom}_{k+1}^{\text{sym}}(V, W)$ takie, że $\Phi \circ \Delta_{k+1} \equiv 0$. Wystarczy pokazać, że $\Phi(x, \dots, x, y) = 0$ dla każdych x, y , bo przy ustalonym y dostajemy odwzorowanie k -liniowe, które jest zerowe z indukcji. Z dowolności y dostaniemy $\Phi \equiv 0$. Dla $u, v \in V$ mamy

$$0 = \Phi(u + v, \dots, u + v) = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \Phi(\underbrace{u, \dots, u}_j \text{ razy}, \underbrace{v, \dots, v}_{k+1-j} \text{ razy}).$$

Dla $u = x, v = \ell y$ daje nam to

$$\begin{aligned} 0 &= \binom{k+1}{1} \Phi(x, \ell y, \dots, \ell y) + \binom{k+1}{2} \Phi(x, x, \ell y, \dots, \ell y) + \dots + \binom{k+1}{k} \Phi(x, \dots, x, \ell y) = \\ &= \binom{k+1}{1} \ell^k \Phi(x, y, \dots, y) + \binom{k+1}{2} \ell^{k-1} \Phi(x, x, y, \dots, y) + \dots + \binom{k+1}{k} \ell \Phi(x, \dots, x, y). \end{aligned}$$

Ten napis można potraktować jak równanie z niewiadomymi $z_{k+1-j} = \binom{k+1}{j} \Phi(x, \dots, x, y, \dots, y)$. Dla ℓ przyjmującego wartości $1, \dots, k$ dostajemy układ równań liniowych zadany macierzą

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2^2 & \dots & 2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k^2 & \dots & k^k \end{bmatrix}.$$

Po wydzieleniu kolejnych wierszy przez $1, 2, \dots, k$ dostajemy macierz Vandermonda. Zatem $\det A = k! \prod_{1 \leq i < j \leq k} (j - i) \neq 0$. Z uogólnionego twierdzenia Cramera jedyne rozwiązanie to $z_1 = \dots = z_k = 0$. W szczególności $0 = z_1 = \binom{k+1}{k} \Phi(x, \dots, x, y)$, co daje tezę. $\square$

Propozycja 22 (Wzór polaryzacyjny). Dla $\varphi \in Q_k(V, W)$ odwzorowanie $\Phi \in \text{Hom}_k^{\text{sym}}(V, W)$ takie, że $\varphi = \Phi \circ \Delta_k$ jest zadane przez

$$\Phi(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \{0,1\}} (-1)^{k-(\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_k)} \varphi(\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_k v_k).$$

Dowód. Od razu widać, że Φ jest symetryczne. Pozostaje pokazać $\varphi = \Phi \circ \Delta_k$. Mamy

$$\begin{aligned} \Phi(v, \dots, v) &= \frac{1}{k!} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \{0,1\}} (-1)^{k-(\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_k)} \varphi(\varepsilon_1 v + \dots + \varepsilon_k v) = \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \{0,1\}} (-1)^{k-(\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_k)} (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k)^k \varphi(v) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^k \varphi(v). \end{aligned}$$

Pozostaje pokazać, że $\sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^k = k!$. Zauważmy, że $k!$ jest liczbą bijekcji (a więc surjekcji) między $\{1, \dots, k\}$ a $\{1, \dots, k\}$. Oznaczmy przez A_i zbiór takich funkcji $\{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$, które nie przyjmują wartości i . Mamy

$$\begin{aligned} k! &= k^k - \left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = k^k - \sum_{r=1}^k (-1)^{r+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq k} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}| = \\ &= k^k - \sum_{r=1}^k (-1)^{r+1} \binom{k}{r} (k-r)^k = k^k - \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i+1} \binom{k}{i} i^k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^k. \end{aligned}$$

□

Definicja 28. Niech V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad $\mathbb{K}$, a $k \in \mathbb{N}$. Odwzorowanie $\varphi : V \rightarrow W$ nazywamy wielomianem stopnia nie większego niż k , gdy istnieją $\varphi_i \in Q_i(V, W)$ dla $i = 0, \dots, k$ takie, że $\varphi = \varphi_0 + \dots + \varphi_k$. Jeśli $\varphi_k \neq 0$, to k nazywamy stopniem φ i oznaczamy $\deg \varphi$. Ogół wielomianów stopnia co najwyżej k oznaczamy $P_k(V, W)$. Oznaczamy $P(V, W) = \bigcup_{k=0}^{\infty} P_k(V, W)$.

Uwaga. $\varphi \equiv 0$ jest dowolnego stopnia, a $P_k(V, W)$ jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$.

Łatwo sprawdzić, że dla $V = \mathbb{K}^m$, $W = \mathbb{K}$ mamy $P_k(V, W) = \mathbb{K}_k[x_1, \dots, x_m]$.

Propozycja 23. Dla przestrzeni unormowanych E i F nad $\mathbb{K}$ wielomian $\varphi = \varphi_0 + \dots + \varphi_k \in P_k(E, F)$ jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy każde $\varphi_i \in Q_i(V, W)$ jest ciągłe, co jest równoważne temu, że każde odwzorowanie $\Phi_i \in \text{Hom}_i^{\text{sym}}(E, F)$ jest ciągłe, to znaczy $\Phi_i \in \mathcal{L}_i^{\text{sym}}(E, F)$.

Dowód. Ciągłość każdego φ_i oczywiście implikuje ciągłość φ . Dla dowodu w drugą stronę zauważmy, że dla $\ell = 1, \dots, k$ i ustalonego $x \in E$ równania postaci $\varphi(\ell x) = \sum_{i=0}^k \ell^i \varphi_i(x)$ tworzą układ równań liniowych o zmiennych $\varphi_i(x)$. Macierz tego układu to macierz Vandermonda, a więc jest odwracalna i istnieje rozwiązanie $\varphi_i(x) = \sum_{j=0}^k a_{ij} \varphi(jx)$. Zatem φ_i jest kombinacją liniową funkcji ciągłych.

Ciągłość Φ_i oczywiście implikuje ciągłość φ_i , natomiast wzór polaryzacyjny daje drugą implikację. □

Definicja 29. Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $a \in A \subseteq E$, $f : A \rightarrow F$. O wielomianie $\varphi \in P_k(E, F)$ mówimy, że jest rozkładem skończonym rzędu k funkcji f w punkcie a , jeśli $f(a+x) = \varphi(x) + o(\|x\|^k)$ (przy $x \rightarrow 0$).

Uwaga. f jest ciągła w a wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rozkład skończony f rzędu 0 w a .

f jest różniczkowalna w a wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rozkład skończony ciągły f rzędu 1 w a .

Propozycja 24. Załóżmy, że f ma rozkład skończony rzędu k w a . Rozkład ten jest wyznaczony jednoznacznie.

Dowód. Niech $\varphi, \psi \in P_k(E, F)$ będą odpowiednimi rozkładami. Rozważmy $\rho = \varphi - \psi \in P_k(E, F)$. Oczywiście $\rho(x) = o(\|x\|^k)$ w zerze. Jeśli $\rho \neq 0$, to w postaci $\rho = \rho_0 + \dots + \rho_k$ istnieje $i \in \{0, \dots, k\}$ takie, że $\rho_i \neq 0$. Wybierzmy minimalne i_0 spełniające tę własność i niech $v \in E \setminus \{0\}$ będzie takie, że $\rho_{i_0}(v) \neq 0$. Mamy $\frac{\rho(tv)}{\|tv\|^k} \rightarrow 0$ przy $t \rightarrow 0^+$. Zachodzi to również dla wykładników $j < k$, bo $\|tv\|^j \geq \|tv\|^k$ dla odpowiednio małego t . W szczególności

$$0 \leftarrow \frac{\rho(tv)}{\|tv\|^{i_0}} = \frac{\rho_{i_0}(tv) + \dots + \rho_k(tv)}{\|tv\|^{i_0}} = \frac{t^{i_0}\rho_{i_0}(v) + \dots + t^k\rho_k(v)}{t^{i_0}\|v\|^{i_0}} = \frac{\rho_{i_0}(v) + \dots + t^{k-i_0}\rho_k(v)}{\|v\|^{i_0}} \rightarrow \frac{\rho_{i_0}(v)}{\|v\|^{i_0}} \neq 0.$$

To daje sprzeczność i kończy dowód. $\square$

Uwaga. Jeśli f jest n -krotnie różniczkowalne w a , to $d_a^k f \in \mathcal{L}_k^{\text{sym}}(E, F)$. Zatem we wzorze Taylora sumujemy wielomiany jednorodne i ciągłe $h \rightarrow d_a^k f \cdot (h)^k$. Zatem $T_a^n f \in P_n(E, F)$ i jest klasy $\mathcal{C}^\infty$. Twierdzenie o wielomianie Taylora z resztą Peany mówi, że f ma rozkład skończony rzędu n , który jest ciągły i jest on wyznaczony jednoznacznie.

Przykład. Niech $f(x, y) = 1 + x^2 + x^3y + x^7 + y^9x$. Chcemy znaleźć wzór Taylora z resztą Peany w zerze rzędu 5. Nasza funkcja już jest wielomianem, zatem wystarczy usunąć z niej jednomiany za dużego stopnia i $\varphi(x, y) = 1 + x^2 + x^3y$, natomiast $x^7 + y^9x = o(\|(x, y)\|^5)$.

Uwaga. Znając wielomian Taylora możemy zastosować wzór polaryzacyjny do kolejnych wielomianów jednorodnych w tym rozkładzie skończonym, odzyskując w ten sposób różniczki (w zerze).

Uwaga. Dla $Q \in Q_k(E, F)$ mamy warunek równoważny ciągłości postaci $\|Q(x)\| \leq \text{const} \|x\|^k$ i wtedy $Q(x) = o(\|x\|^p)$ dla $p < k$.

18. Szeregi Taylora

2025-12-05

Definicja 30. Jeśli E, F są przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $a \in A \subseteq E$, $f : A \rightarrow F$ i f ma w a różniczki wszystkich rzędów, to rozważamy szereg funkcyjny $T_a f(h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} d_a^n f(h)^n$.

Dla $E = \mathbb{R}^m$ i $F = \mathbb{R}$ rozważamy funkcję $f : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^\infty$ i tworzymy szereg formalny $\mathbb{R}[[x_1, \dots, x_m]] \ni T_0 f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(0) x^\alpha$.

Twierdzenie 47 (Borel). Odwzorowanie $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m) \ni f \rightarrow T_0 f \in \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_m]]$ jest epimorfizmem, to znaczy dla dowolnie wybranych $(c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^m} \subseteq \mathbb{R}$ zawsze znajdziemy funkcję f klasy $\mathcal{C}^\infty$ taką, że $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(0) = c_\alpha$.

Uwaga. Nad $\mathbb{C}$ takie twierdzenie nie zachodzi. Istotnie, już sama $\mathbb{C}$ -różniczkowalność wymusza analityczność, co oznacza zbieżność $T_0 f$ i ogranicza to, jaki to może być szereg.

Uwaga. Sumy cząstkowe $T_0 f$ to $T_0^k f = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(0) x^\alpha$ i zgodnie z twierdzeniem o wielomianie Taylora mamy $f(x) = T_0^k f(x) + o(\|x\|^k)$. Sam szereg $T_0 f$ może być:

1. zbieżny w otoczeniu zera do f – wtedy f jest $\mathbb{K}$ -analityczna w zerze.
2. zbieżny w otoczeniu zera, ale nie do f , np. dla $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ wychodzi $T_0 f \equiv 0$.
3. rozbieżny, to znaczy promień zbieżności wynosi 0.

Uwaga. Odnotujmy, że zbieżny szereg potęgowy $S(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} a_\alpha (x-a)^\alpha$ jest funkcją klasy $\mathcal{C}^\infty$ oraz $a_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} S}{\partial x^\alpha}(a)$. Wynika to z tego, że $\frac{\partial^{|\alpha|} S}{\partial x^\alpha}(x) = \sum_{\beta \geq \alpha} \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!} a_\beta (x-a)^{\beta-\alpha}$ i ten szereg jest zbieżny w tym samym polidysku, co wyjściowy szereg.

19. Ekstrema funkcji

2025-12-05

Definicja 31. Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ i $a \in X$. Mówimy, że f ma w a minimum (maksimum) lokalne, gdy istnieje takie otoczenie $U \ni a$, że dla każdego $x \in U$ zachodzi $f(x) \geq f(a)$ ($f(x) \leq f(a)$). Ekstremum (minimum lub maksimum) jest silne, jeśli poza $x = a$ nierówność jest ostra.

Definicja 32. Dla przestrzeni Banacha E nad $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_+$ i formy jednorodnej $\varphi \in Q_k(E, \mathbb{R})$ mówimy, że φ jest:

- nieujemna, gdy $\varphi(h) \geq 0$ dla $h \in E$.
- niedodatnia, gdy $\varphi(h) \leq 0$ dla $h \in E$.
- dodatnia, gdy $\varphi(h) > 0$ dla $h \in E \setminus \{0\}$.
- ujemna, gdy $\varphi(h) < 0$ dla $h \in E \setminus \{0\}$.
- dodatnio określona (koercywna), gdy istnieje takie $c > 0$, że $\varphi(h) \geq c \|h\|^k$ dla $h \in E$.
- ujemnie określona, gdy istnieje takie $c > 0$, że $\varphi(h) \leq -c \|h\|^k$ dla $h \in E$.

Uwaga. Mamy dodatnio określona $\implies$ dodatnia $\implies$ nieujemna oraz ujemnie określona $\implies$ ujemna $\implies$ niedodatnia.

Mamy $\varphi(h) = \Phi(h, \dots, h)$ dla pewnego $\Phi \in \text{Hom}_k^{\text{sym}}(E, \mathbb{R})$, a zatem jeśli k jest nieparzyste oraz φ spełnia którykolwiek warunek, to z $\varphi(-h) = (-1)^k \Phi(h, \dots, h) = -\varphi(h)$ wynika $\varphi \equiv 0$, a warunki inne niż nieujemność i niedodatniość nie mają sensu.

Przy $\dim E < \infty$ dodatnia określoność jest równoważna dodatniości, a ujemna określoność ujemności. Wiemy bowiem, że domknięta kula jednostkowa jest zwarta i odwzorowania wieloliniowe są ciągle, a więc φ jest ciągle i przyjmuje na sferze jednostkowej minimum λ . Zatem dodatniość φ implikuje $\lambda > 0$ i dla $h \in E \setminus \{0\}$ mamy $\lambda \leq \varphi\left(\frac{h}{\|h\|}\right) = \frac{1}{\|h\|^k} \varphi(h)$. Analogicznie dla ujemności.

Propozycja 25 (Warunek konieczny ekstremum). Niech E będzie przestrzenią Banacha nad $\mathbb{R}$, $a \in A \subseteq E$ oraz $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Załóżmy, że f jest różniczkowalna w a i ma w a ekstremum lokalne. Wtedy $d_a f \equiv 0$.

Dowód. $a \in \text{int } A$, więc ma sens $g_v(t) = f(a + tv)$ dla $|t| \ll 1$ i przy dowolnie ustalonym $v \in E \setminus \{0\}$. Jeśli f ma ekstremum lokalne w a , to g_v ma ekstremum lokalne w 0, a że g_v jest funkcją jednej zmiennej, to $g'_v(0) = 0$ i $d_a f \cdot v = 0$. $\square$

Uwaga. Dalej będziemy stosować twierdzenie o wielomianie Taylora z resztą Peany z resztą zapisywaną jako $\eta(h) \|h\|^n$ z funkcją $\eta : A - a \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłą w 0 i taką, że $\eta(0) = 0$.

Wiemy już, że dla $\Phi \in \text{Hom}_k^{\text{sym}}(E, \mathbb{R})$ mamy $\Phi \equiv 0 \iff \Phi \circ \Delta_n \equiv 0$.

Propozycja 26. Jeśli $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest n -krotnie różniczkowalna w a ($n \geq 2$), ma w a minimum (maksimum) lokalne, a ponadto $d_a^k f \equiv 0$ dla $k = 1, \dots, n-1$ i $d_a^n f \neq 0$, to $d_a^n f \circ \Delta_n$ jest nieujemna (niedodatnia), a ponadto n jest parzyste.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że istnieje takie $h \in E$, że $d_a^n f \cdot (h)^n < 0$. Wtedy $h \neq 0$. Funkcja $g(t) = f(a + th)$ ma minimum lokalne w 0. Ponadto dla $t > 0$

$$g(t) = f(a) + \frac{1}{n!} d_a^n f \cdot (th)^n + \eta(th) \|th\|^n = f(a) + \frac{1}{n!} t^n d_a^n f \cdot (h)^n + \eta(th) t^n \|h\|^n.$$

Oznaczmy $c = \frac{1}{n!} d_a^n f(h)^n < 0$. Istnieje $\delta > 0$ takie, że dla każdego $t < \delta$ mamy $\|\eta(th)\| \|h\|^n \leq \frac{|c|}{2} = \frac{-c}{2}$, więc $g(t) \leq f(a) + ct^n - \frac{c}{2}t^n < f(a) = g(0)$, sprzeczność. Zatem $d_a^n f \circ \Delta_n$ musi być nieujemna. Analogicznie pokazujemy drugą wersję wypowiedzi. Parzystość n wynika z nieujemności i niezerowości. $\square$

Twierdzenie 48 (Warunek wystarczający ekstremum). Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ będzie n -krotnie różniczkowalna w a . Zakładamy, że $d_a^k f \equiv 0$ dla $k = 1, \dots, n-1$ oraz że $d_a^n f \circ \Delta_n$ jest dodatnio (ujemnie) określone (wtedy n jest parzyste). W takiej sytuacji f ma w a minimum (maksimum) lokalne.

Dowód. Ze wzoru Taylora $f(a+h) - f(a) = \frac{1}{n!} d_a^n f(h)^n + \eta(h) \|h\|^n$. Z założenia $d_a^n f(h)^n \geq c \|h\|^n$ dla pewnego $c > 0$ i dowolnego $h \in E$. Zatem $f(a+h) - f(a) \geq (\frac{c}{n!} + \eta(h)) \|h\|^n$. Wyrażenie w nawiasie jest dodatnie dla $\|h\| \ll 1$, co kończy dowód. $\square$

Przykład. $f(x, y) = x^2 + y^4$ ma minimum (globalne) w $(0, 0)$. Jest $d_{(0,0)} f = 2x + 4y^3 = 0$ oraz $d_{(0,0)}^2 f(h)^2 = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = 2h_1^2$, co nie jest dodatnio określone, bo zeruje się przy niezerowym h_2 . Warunek wystarczający nie jest więc konieczny.

Przykład. Dla $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ jest $\nabla f(x, y) = [3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x]$, zatem warunek konieczny jest spełniony w $(0, 0)$ i $(1, 1)$. Mamy $d_{(x,y)}^2 f = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}$, co daje formę kwadratową postaci $d_{(x,y)}^2 f(h)^2 = \begin{cases} -6h_1 h_2 & (x, y) = (0, 0) \\ 6h_1^2 + 6h_2^2 - 6h_1 h_2 & (x, y) = (1, 1) \end{cases}$. Zatem w $(0, 0)$ dostajemy formę przyjmującą różne znaki i nie ma ekstremum, natomiast w $(1, 1)$ jest $d_{(1,1)}^2 f(h)^2 = 3(h_1 - h_2)^2 + 3\|h\|^2 \geq 3\|h\|^2$, czyli mamy dodatnią określoność i minimum.

Uwaga. W skończonym wymiarze $E \simeq \mathbb{R}^n$ i dodatnia określoność jest po prostu dodatniością. Dla funkcji dwukrotnie różniczkowalnej mamy macierz Hesse'ego $H = d_a^2 f = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right]_{i,j=1}^n$. Zachodzi

$$d_a^2 f(h, k) = \begin{bmatrix} k_1 & \dots & k_n \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \langle k, Hh \rangle = \langle h, Hk \rangle,$$

czyli mamy symetryczną formę dwuliniową $B(h, k) = d_a^2 f(h, k)$.

Twierdzenie 49. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$ i niech $\dim V = n \geq 1$. Dla dwuliniowej formy symetrycznej $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ istnieje baza ortonormalna $\{e_i\}_{i=1}^n$.

Dowód. Oznaczmy $S_1 = \mathbb{S}_V$ (sfera jednostkowa), $V_1 = V$. Wiemy, że B jest ciągle a S_1 zwarte. Zatem $B \circ \Delta_V$ osiąga maksimum na S_1 w punkcie $e_1 \in S_1$.

Niech $V_2 = (\mathbb{R}e_1)^\perp$ (domknięta podprzestrzeń). $S_2 = S_1 \cap V_2$ jest zwarte. Zatem $B \circ \Delta_V$ osiąga maksimum na S_2 w punkcie $e_2 \in S_2$. Ogólnie kładziemy $V_{k+1} = \{x \in V_k : \langle x, e_k \rangle = 0\}$ i $S_{k+1} = S_k \cap V_{k+1}$, mamy $B(e_{k+1}, e_{k+1}) \geq B(x, x)$ dla $x \in S_{k+1}$. W każdym kroku spada wymiar rozważanej przestrzeni, więc procedura kończy się po n krokach. Wektory $\{e_1, \dots, e_n\}$ są ortogonalne, więc liniowo niezależne i tworzą bazę V .

Dla ustalonych $i < j$ i $t \in \mathbb{R}$ niech $u_{ij}(t) = \frac{e_i + te_j}{\|e_i + te_j\|} \in S_i$. Mamy

$$\begin{aligned} B(e_i, e_i) + t^2 B(e_j, e_j) + 2t B(e_i, e_j) &= B(e_i + te_j, e_i + te_j) \leq B(e_i, e_i) \|e_i + te_j\|^2 = \\ B(e_i, e_i) \left(\|e_i\|^2 + 2t \langle e_i, e_j \rangle + t^2 \|e_j\|^2 \right) &= B(e_i, e_i) (1 + t^2), \end{aligned}$$

gdzie nierówność wynika z definicji e_i . Dostajemy więc

$$t^2 (B(e_i, e_i) - B(e_j, e_j)) - 2tB(e_i, e_j) \geq 0.$$

Jest to wielomian kwadratowy (ze zmienną t), którego pierwiastkiem jest 0. Jego nieujemność implikuje, że drugim pierwiastkiem też jest 0, a więc jego wyróżnik jest zerowy, czyli $4B(e_i, e_j)^2 = 0$. Zatem wskazane wektory tworzą bazę ortonormalną. $\square$

Uwaga. Stosując powyższe twierdzenie do $V = \mathbb{R}^n$ i $B(h, k) = \langle h, Hk \rangle$ wybieramy bazę ortonormalną $\{v_i\}_{i=1}^n$ taką, że $\langle v_j, Hv_i \rangle = 0$ dla $i \neq j$. Mamy $Hv_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j$, więc dla $j_0 \neq i$ mamy

$$0 = \left\langle v_{j_0}, \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j \right\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle v_{j_0}, v_j \rangle = \lambda_{j_0} \|v_{j_0}\|^2 = \lambda_{j_0}.$$

To znaczy, że $Hv_i = \lambda_i v_i$ i $H = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ w tej bazie. Stąd

$$B(x, x) = \left\langle \sum_{j=1}^n x_j v_j, H \sum_{i=1}^n x_i v_i \right\rangle = \sum_{j,i=1}^n \langle x_j v_j, x_i \lambda_i v_i \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

jest postacią kanoniczną formy kwadratowej $B(x, x)$. Z tego wynika, że dodatnia lub ujemna określoność B zależy od wartości własnych λ_i – wszystkie muszą mieć ten sam znak.

Uwaga. Niech $K \subseteq \mathbb{R}^m$ będzie zwarty. Funkcja ciągła $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ osiąga kresy na K . Niech $\Sigma_f = \{x \in \text{int } K : d_x f = 0\}$ będzie zbiorem punktów krytycznych. Zachodzi $\{\min f(K), \max f(K)\} \subseteq f(\Sigma_f) \cup f(\partial K)$, bo jeśli ekstremum leży we wnętrzu, to jest ekstremum lokalnym.

W przypadku $\dim E = \infty$ zbiór zwarty K ma puste wnętrze (bo kula domknięta nie jest zwarta), więc nie da się tam zastosować technik opartych na różniczkowaniu.

20. Rozmaiwości

2025-12-11

Definicja 33. Niech X będzie przestrzenią topologiczną Hausdorffa spełniającą drugi aksjomat przeliczalności. X nazywamy rozmaiłością topologiczną wymiaru $n \in \mathbb{N}$, gdy lokalnie przypomina $\mathbb{R}^n$, co znaczy, że każdy punkt $a \in X$ posiada otoczenie otwarte $a \in U$, które jest homeomorficzne z $\mathbb{R}^n$.

Uwaga. Przyjmuje się często, że $\emptyset$ jest rozmaiłością topologiczną wymiaru -1 .

Dowolna przeliczalna dyskretna przestrzeń topologiczna jest rozmaiłością topologiczną wymiaru 0.

Rozmaiłość posiada lokalnie własności topologiczne $\mathbb{R}^n$. W definicji można zastąpić $\mathbb{R}^n$ przez kulę otwartą w $\mathbb{R}^n$.

Uwaga. Gdyby z definicji wyrzucić T_2 , to i tak mamy tę własność lokalnie. Nie musi to być jednak własność globalna: na $X = \mathbb{R} \setminus \{0\} \cup \{p_1, p_2\}$ (gdzie p_1, p_2 to punkty poza prostą) definiujemy topologię, której baza składa się z tej indukowanej z $\mathbb{R}$ oraz zbiorów postaci $\{p_i\} \cup ((-\varepsilon_1, \varepsilon_2) \setminus \{0\})$. Nie da się oddzielić p_1 od p_2 , ale lokalnie jest to przestrzeń T_2 .

Definicja 34. Na przestrzeni topologicznej Hausdorffa X z 2AP n -wymiarowym atlasem nazywamy rodzinę $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, gdzie $U_i \in \text{top } X \setminus \{\emptyset\}$, a $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ są homeomorfizmami oraz $\bigcup_{i \in I} U_i = X$. Homeomorfizmy φ_i nazywamy mapami (ang. charts).

Definicja 35. Jeśli $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, to możemy rozważyć $\varphi_i(U_i \cap U_j) \in \text{top } \mathbb{R}^n$. Odwzorowanie

$$\varphi_{ij} = \varphi_j \circ (\varphi_i)^{-1}|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)}$$

jest homeomorfizmem zwanym odwzorowaniem przejścia lub przejściówką (chart transformation).

Definicja 36. Rozważmy przestrzeń topologiczną M spełniającą T_2 i 2AP. Ustalmy ciało $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ i $m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Rodzinę $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ nazywamy m -wymiarowym atlasem różniczkowym klasy $\mathcal{C}^k$ na M , gdy

1. dla każdego $i \in I$ mamy $U_i \in \text{top } M \setminus \{\emptyset\}$.
2. dla każdego $i \in I$ istnieje $V_i \in \text{top } \mathbb{K}^m$ takie, że $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ jest homeomorfizmem.
3. $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.
4. dla wszystkich $i, j \in I$ takich, że $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ przejściówka φ_{ij} jest klasy $\mathcal{C}^k$.

Uwaga. Mamy $\varphi_{ii} = \text{id}_{V_i}$ oraz $\varphi_{j\ell} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{i\ell}$. Z tego wynika $\varphi_{ij}^{-1} = \varphi_{ji}$. Zatem φ_{ij} są $\mathcal{C}^k$ -dyfeomorfizmami.

Odwzorowania $\{\varphi_i^{-1}\}$ nazywa się lokalną parametryzacją lub lokalnym układem współrzędnych.

Przy ustalonym M, m, k wymiar m jest wyznaczony jednoznacznie (wynika z twierdzenia Brouwera – jeśli topologie się zgadzają, to wymiar algebraiczny też).

Uwaga. Atlasy różniczkowe na M ustalonej klasy są uporządkowane liniowo przez inkluzję. Łatwo się przekonać, że można stosować lemat Kuratowskiego-Zorna, więc istnieją atlasy maksymalne ustalonej klasy.

Definicja 37. Atlasy maksymalne dla M, k nazywamy m -wymiarowymi strukturami różniczkowymi (rzeczywistymi lub zespolonymi, odpowiednio) klasy $\mathcal{C}^k$. Oznaczamy ich zbiór przez $\mathcal{D}_k$.

Definicja 38. Każdy atlas różniczkowy $\mathcal{A}$ klasy $\mathcal{C}^k$ na M zawiera się w pewnym atlasie maksymalnym (otrzymanym przez dorzucanie do $\mathcal{A}$ map, które dają przejściówki klasy $\mathcal{C}^k$), który oznaczamy $\mathcal{D}_k(\mathcal{A})$ i nazywamy strukturą generowaną przez atlas $\mathcal{A}$.

Uwaga. Każdy atlas klasy $\mathcal{C}^k$ jest poszerzalny do struktury klasy $\mathcal{C}^{k-1}$, czyli na przykład $\mathcal{D}_\omega \subseteq \mathcal{D}_\infty \subseteq \mathcal{D}_k$, gdzie przypadek $k = 0$ to rozmaitości topologiczne.

Definicja 39. Przestrzeń topologiczną M spełniającą T_2 i 2AP nazywamy rozmaitością rzeczywistą (zespoloną) wymiaru m klasy $\mathcal{C}^k$, gdy zadana jest na niej struktura różniczkowa rzeczywista (zespolona).

Uwaga. Przyjmuje się, że $M = \emptyset$ jest rozmaitością analityczną (rzeczywistą i zespoloną) wymiaru -1 .

Rozmaitość klasy $\mathcal{C}^k$ jest też klasy $\mathcal{C}^\ell$ dla $\ell \leq k$. Każda rozmaitość różniczkowa zespolona wymiaru m jest analityczną rozmaitością rzeczywistą wymiaru $2m$.

Zadanie struktury klasy $\mathcal{C}^k$ na M sprowadza się do ustalenia atlasu klasy $\mathcal{C}^k$, który można rozszerzyć do struktury.

Propozycja 27. Niech $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ będą atlasami m -wymiarowymi klasy $\mathcal{C}^k$ na M , a $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{A}$ będzie strukturą klasy $\mathcal{C}^k$ wymiaru m na M . Niech $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$. Wtedy

$$\mathcal{D} = \left\{ (U, \varphi) : \begin{array}{l} U \in \text{top } M \setminus \{\emptyset\}, \\ \varphi : U \rightarrow V \in \text{top } \mathbb{K}^m \text{ homeomorfizm,} \\ \forall i \in I \ \varphi \circ \varphi_i^{-1}, \varphi_i \circ \varphi^{-1} \text{ klasy } \mathcal{C}^k, \\ \forall i \in I: U_i \cap U \neq \emptyset \ \varphi \circ (\varphi_i|_{U_i \cap U})^{-1}, \varphi_i \circ (\varphi|_{U_i \cap U})^{-1} \text{ klasy } \mathcal{C}^k \end{array} \right\}.$$

Do tego $\mathcal{D}_k(\mathcal{A}) = \mathcal{D}_k(\mathcal{B}) \iff \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ jest atlasem klasy $\mathcal{C}^k$.

Dowód. Drugie wynika z pierwszego, a pierwsze jest oczywiste. $\square$

Wniosek. Dany atlas generuje dokładnie jedną strukturę.

Przykład. $M = \Omega \in \text{top } \mathbb{K}^m \setminus \{\emptyset\}$ z atlasem $\mathcal{A} = \{(\Omega, \text{id}_\Omega)\}$ jest rozmaitością analityczną wymiaru m . Wtedy

$$\mathcal{D}_k(\mathcal{A}) = \left\{ (U, \varphi) : \begin{array}{l} \emptyset \neq U \subseteq \Omega \text{ otwarte,} \\ \varphi : U \rightarrow V \in \text{top } \mathbb{K}^m \text{ homeomorfizm,} \\ \varphi, \varphi^{-1} \text{ klasy } \mathcal{C}^k \end{array} \right\}.$$

Zatem $\mathcal{D}_k(\mathcal{A}) = \mathcal{D}_k(\{(\Omega, h)\})$, gdzie $h : \Omega \rightarrow \Omega$ jest dowolnym $\mathcal{C}^k$ -dyfeomorfizmem.

Przykład. Niech $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ z topologią indukowaną z $\mathbb{R}^2$. Rozważmy funkcję $\psi(t) = (\cos t, \sin t) \in M$ dla $t \in \mathbb{R}$. Dla $V_1 = (0, 2\pi)$ i $V_2 = (\pi, 3\pi)$ ustalmy $\varphi_1 = (\psi|_{V_1})^{-1}$ i $\varphi_2 = (\psi|_{V_2})^{-1}$. Są to mapy na M odpowiednio na zbiorach $U_1 = M \setminus \{(1, 0)\}$ i $U_2 = M \setminus \{(-1, 0)\}$. Przejściówka φ_{12} jest $\mathcal{C}^\omega$ -dyfeomorfizmem.

Dla M nie istnieje jedna globalna mapa, bo M jest zwarty, a więc nie jest homeomorficzny z $\mathbb{R}$.

Przykład. Rozważmy sferę Riemanna: $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (uzwarcie jednopunktowe Aleksandrowa).

Możemy zadać na niej mapy $\varphi_1 : \mathbb{C} \ni z \rightarrow z \in \mathbb{C}$ oraz $\varphi_2 : \mathbb{C}^* \cup \{\infty\} \ni z \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{z}, & z \in \mathbb{C}^* \\ 0, & z = \infty \end{cases}$. Mamy

$\varphi_{12}(z) = \frac{1}{z}$, otrzymujemy strukturę analityczną i $\hat{\mathbb{C}}$ jest zespoloną, zwartą i spójną rozmaitością jednowymiarową.

Takie rozmaitości (zespolone, spójne, jednowymiarowe, klasy $\mathcal{C}^1$) nazywamy powierzchniami Riemanna. Istnieje twierdzenie Radó z 1925 roku, które mówi, że w tym przypadku można pominąć 2AP w definicji rozmaitości.

Przykład (Rozmaitości Grassmanna). Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$, $\dim V = m \geq 1$. Dla $1 \leq p \leq m$ definiujemy $G_p(V) = \{L : L \leq V, \dim L = p\}$. Ten obiekt nazywamy p -tym grassmannianem. $G_p(V)$ posiada strukturę zwartej rozmaitości analitycznej wymiaru $p(m-p)$.

Dla $p = 1$ dostajemy przestrzeń rzutową przestrzeni V , którą można otrzymać jako ilorazową przestrzeń topologiczną zadaną relacją $v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \lambda v = w$. Odpowiedni atlas otrzymujemy definiując

$$U_i = \{[(x_1, \dots, x_m)]_\sim : x_i \neq 0\} \xrightarrow{\varphi_i} \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_m}{x_i} \right) \in \mathbb{K}^{m-1}.$$

21. Podrozmaitości

2025-12-12

Definicja 40. Rozważmy rozmaitość M wymiaru m klasy $\mathcal{C}^k$ nad $\mathbb{K}$. Ustalmy $0 \leq n \leq m$. Zbiór $\emptyset \neq N \subseteq M$ nazywamy podrozmaitością M wymiaru n , jeśli dla każdego $a \in N$ istnieje otoczenie otwarte $U \ni a$ oraz mapa $\varphi : U \rightarrow \mathbb{K}^m$ taka, że

$$U \cap N = \varphi^{-1}(\{x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m : x_{n+1} = \dots = x_m = 0\}).$$

Przyjmujemy, że $\emptyset$ jest podrozmaitością wymiaru -1 . Ponadto gdy $n = m - 1$ mówimy, że N jest hiperpowierzchnią, a ogólnie liczbę $m - n$ nazywamy kowymiarem N .

Uwaga. Podrozmaitość n -wymiarowa N jest rozmaitością abstrakcyjną wymiaru n i tej samej klasy, co M . Świadczy o tym atlas $\mathcal{A}_N = \{(U \cap N, \tilde{\varphi}) : (U, \varphi) \in \mathcal{A}'\}$, gdzie $\mathcal{A}'$ składa się z tych elementów atlasu M , które spełniają warunek z definicji podrozmaitości, a dla $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ bierzemy $\tilde{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Punkty są podrozmaitościami zerowymiarowymi.

Jeśli $N \in \text{top } M \setminus \{\emptyset\}$, to N jest podrozmaitością wymiaru $m = \dim M$.

Jeśli V jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$, to dowolny izomorfizm z $\mathbb{K}^m$ wyznacza na V strukturę różności m -wymiarowej analitycznej. Wtedy podprzestrzenie afiniczne są podróżnościami wymiaru takiego, jak algebraiczny.

Definicja 41. Niech $\emptyset \neq \Omega \in \text{top } \mathbb{K}^n$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}^m$ będzie klasy $\mathcal{C}^1$. Rzędem f w a nazywamy wartość $\text{rg } f(a) = \dim \text{Im } d_a f$. Jest to rząd macierzy $d_a f$.

Definicja 42. Niech $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{K} : |x| < 1\}$. Definiujemy $\mathbb{D}_r = r\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{K} : |x| < r\}$ dla $r > 0$. Będziemy używać poldysków $\mathbb{D}_r^n \subseteq \mathbb{K}^n$.

Twierdzenie 50 (O stałym rzędzie). Niech $\emptyset \neq \Omega \in \text{top } \mathbb{K}^n$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}^m$ będzie klasy $\mathcal{C}^k$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty, \omega\}$. Niech istnieje $d \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $x \in \Omega$ zachodzi $\text{rg } f(a) = d$. W takiej sytuacji dla każdego $a \in \Omega$ istnieją otoczenia $a \in U \subseteq \Omega$ oraz $b = f(a) \in W \subseteq \mathbb{K}^m$ takie, że $f(U) \subseteq W$ oraz istnieją $\mathcal{C}^k$ -dyfeomorfizmy $u : \mathbb{D}^n \rightarrow U$, $w : W \rightarrow \mathbb{D}^m$ posyłające odpowiednio $0 \rightarrow a$ i $b \rightarrow 0$, dla których $(w \circ f \circ u)(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0)$ dla $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{D}^n$.

Dowód. Bez straty ogólności $m, n, d \in \mathbb{N}_+$, bo inaczej sytuacja staje się trywialna. Można założyć $a = 0 \in \mathbb{K}^n$, $b = 0 \in \mathbb{K}^m$, bo wystarczy złożyć f z translacjami $\tilde{f} = \tau_{-b} \circ f \circ \tau_a|_{\Omega-a}$, co nadal jest klasy $\mathcal{C}^k$ i $d_x \tilde{f} = \text{id}_{\mathbb{K}^m} \circ d_{x+a} f \circ \text{id}_{\mathbb{K}^n}$, więc rząd się nie zmienia, a translacje są dyfeomorfizmami analitycznymi.

Jeśli $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ ma rząd d , to $\dim \ker L = n - d$, więc można uzupełnić do sumy prostej $\mathbb{K}^n = V \oplus \ker L$, gdzie $V \simeq \mathbb{K}^d \simeq \text{Im } L$. Wybieramy bazę $v_1, \dots, v_d$ dla V i $v_{d+1}, \dots, v_n$ dla $\ker L$. Zauważmy, że $L(v_1), \dots, L(v_d)$ są bazą dla $\text{Im } L$. Uzupełniamy ją wektorami $w_{d+1}, \dots, w_m$ do bazy $\mathbb{K}^m$. Definiujemy izomorfizmy $\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ poprzez $e_i \rightarrow v_i$ oraz $\psi : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^m$ poprzez $L(v_j) \rightarrow e_j$ dla $j = 1, \dots, d$ oraz $w_j \rightarrow e_j$ dla $j = d+1, \dots, m$.

Teraz $(\psi \circ L \circ \varphi)(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = (\psi \circ L)(\sum_{i=1}^n x_i v_i) = \psi\left(\sum_{i=1}^d x_i L(v_i)\right) = (x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0)$. Zatem bez straty ogólności możemy przyjąć, że $d_a f(x) = (x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0)$, bo wystarczy zastąpić f przez $\psi \circ f \circ \varphi$.

Zapiszmy $f = (f_1, \dots, f_m)$ i weźmy $v : \Omega \ni x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (f_1(x), \dots, f_d(x), x_{d+1}, \dots, x_n)$. To odwzorowanie jest klasy $\mathcal{C}^k$ i $d_0 v = (d_0 f_1, \dots, d_0 f_d, p_{d+1}, \dots, p_n)$, gdzie p_j to rzutowanie na j -tą współrzędną. Mamy też $d_0 f_i = p_i$, więc $d_0 v = \text{id}_{\mathbb{K}^n}$ i z twierdzenia o lokalnym dyfeomorfizmie istnieje otoczenie $0 \in U \subseteq \Omega$ oraz $r > 0$ takie, że $v|_U : U \rightarrow r\mathbb{D}^n$ jest $\mathcal{C}^k$ -dyfeomorfizmem. Niech $\tilde{u}$ będzie jego odwrotnością.

Mamy $\tilde{u}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = (x_1, \dots, x_n) \iff (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = (f_1(x), \dots, f_d(x), x_{d+1}, \dots, x_n)$, więc $(f \circ \tilde{u})(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_d, (f_{d+1} \circ \tilde{u})(\tilde{x}), \dots, (f_m \circ \tilde{u})(\tilde{x}))$.

Oznaczmy $g = f \circ \tilde{u} : r\mathbb{D}^n \ni x \rightarrow (x_1, \dots, x_d, g_{d+1}(x), \dots, g_m(x)) \in \mathbb{K}^m$. Jest to odwzorowanie klasy $\mathcal{C}^k$ i $g(0) = 0$.

Mamy $d_x g = \begin{bmatrix} I_d & 0 \\ \alpha & \frac{\partial(g_{d+1}, \dots, g_m)}{\partial(x_{d+1}, \dots, x_n)}(x) \end{bmatrix}$ dla pewnego α oraz $d_x g = d_{\tilde{u}(x)} f \circ d_x \tilde{u}$. To odwzorowanie ma rząd d , ale już I_d ma taki rząd, a więc prawa dolna podmacierz musi być zerowa. Wobec $\frac{\partial(g_{d+1}, \dots, g_m)}{\partial(x_{d+1}, \dots, x_n)}(x) \equiv 0$ mamy, że $(g_{d+1}, \dots, g_m)$ nie zależy od zmiennych $x_{d+1}, \dots, x_n$, a zatem $(g_{d+1}, \dots, g_m)(x_1, \dots, x_n) = (g_{d+1}, \dots, g_m)(x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0)$.

Otrzymaliśmy $g(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_d, g_{d+1}(x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0), \dots, g_m(x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0))$ dla $(x_1, \dots, x_n) \in r\mathbb{D}^n$.

Rozważmy $\tilde{w} : r\mathbb{D}^d \times \mathbb{K}^{m-d} \rightarrow r\mathbb{D}^d \times \mathbb{K}^{m-d}$ zadane wzorem

$$\tilde{w}(y) = (y_1, \dots, y_d, y_{d+1} - g_{d+1}(y_1, \dots, y_d, 0, \dots, 0), \dots, y_m - g_m(y_1, \dots, y_d, 0, \dots, 0)).$$

Jest ono klasy $\mathcal{C}^k$ i odwracalne (ten sam wzór, tylko z plusami), więc $\tilde{w}$ jest $\mathcal{C}^k$ -dyfeomorfizmem. Oczywiście $\tilde{w}(0) = 0$. Niech $W = \tilde{w}^{-1}(r\mathbb{D}^d \times r\mathbb{D}^{m-d})$. Wówczas $(\tilde{w}|_W) \circ f \circ \tilde{u} : r\mathbb{D}^d \times r\mathbb{D}^{m-d} \ni x \rightarrow (x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0)$.

Pozostaje przeskalować: $u : \mathbb{D}^n \ni x \rightarrow \tilde{u}(rx) \in U$, $w : W \ni y \rightarrow \frac{1}{r}\tilde{w}(y) \in \mathbb{D}^m$. □

Uwaga. Z definicji rzędu $d \leq \min \{n, m\}$. Twierdzenie mówi zatem, że z dokładnością do dyfeomorfizmu zamiany zmiennych w dziedzinie i przeciwdziedzinie odwzorowanie o stałym rzędzie zachowuje się lokalnie jak rzutowanie (gdy $m \leq n$) lub zanurzenie (gdy $n \leq m$).

Uwaga. Badanie odwzorowania o stałym rzędzie staje się dużo przyjemniejsze, na przykład dla $b' \in f(U)$ mamy $w(b') = (x', 0)$ dla $x' \in \mathbb{K}^d$ i $0 \in \mathbb{K}^{m-d}$, więc

$$\begin{aligned} f^{-1}(b') &= f^{-1}(w^{-1}(w(b'))) = u(u^{-1}(f^{-1}(w^{-1}(x', 0)))) = u((w \circ f \circ u)^{-1}(x', 0)) \\ &= \{(x', x_{d+1}, \dots, x_m) : x_{d+1}, \dots, x_m \in \mathbb{D}\}. \end{aligned}$$

22. Immersje i submersje

2025-12-15

Definicja 43. Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $\Omega \in \text{top } E$. Funkcję $f : \Omega \rightarrow F$ nazywamy immersją (submersją), jeśli jest klasy $\mathcal{C}^1$ oraz w każdym $x \in \Omega$ różniczka $d_x f$ jest monomorfizmem (epimorfizmem).

Mówimy też, że f jest immersją (submersją) w punkcie $a \in \Omega$, jeśli odpowiednia własność jest spełniona w punkcie a (i niekoniecznie w innych).

Uwaga. Jeśli f jest immersją w a , to $\dim E \leq \dim F$. Jeśli jest f submersją w a , to $\dim E \geq \dim F$.

Uwaga. W przypadku $E \simeq \mathbb{K}^n$, $F \simeq \mathbb{K}^m$ do immersji i submersji możemy stosować twierdzenie o rzędzie. Odwzorowanie będące w a jednocześnie immersją i submersją jest lokalnym dyfeomorfizmem w otoczeniu a .

Definicja 44. Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Mówimy, że f jest półciągłą z góry (co zapisujemy $f \in \mathcal{C}^\uparrow$), jeśli dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy $\{x \in X : f(x) < t\} \in \text{top } X$. Podobnie f jest półciągłą z dołu ($f \in \mathcal{C}^\downarrow$), jeśli dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy $\{x \in X : f(x) > t\} \in \text{top } X$.

Uwaga. Funkcja charakterystyczna zbioru χ_A jest półciągłą z góry wtedy i tylko wtedy, gdy $A = \overline{A}$, a półciągłą z dołu, gdy $A = \text{int } A$.

$$f \in \mathcal{C}^\uparrow \iff -f \in \mathcal{C}^\downarrow.$$

f jest półciągłą z góry, jeśli dla każdego $t \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x \in X : f(x) \geq t\}$ jest domknięty. Podobnie dla półciągłości z dołu. Do tego jeśli f jest półciągłą z góry (dołu), to w pewnym otoczeniu rozważanego punktu wartości f mogą jedynie spadać (wzrastać).

Propozycja 28. $f \in \mathcal{C}^\uparrow \iff \limsup_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ dla każdego $a \in X$.

Dowód. ($\implies$) Przypomnijmy, że $\limsup_{x \rightarrow a} f(x) = \inf_{U \ni a} \sup_{x \in U} f(x)$. Z tego od razu wynika $\limsup_{x \rightarrow a} f(x) \geq f(a)$. Załóżmy nie wprost, że $\limsup_{x \rightarrow a} f(x) \geq f(a) + 2\varepsilon$ dla pewnego $\varepsilon > 0$. Zbiór $U = \{x \in X : f(x) < f(a) + \varepsilon\}$ jest otwarty i zawiera a . Zatem $\sup_{x \in U} f(x) \geq \limsup_{x \rightarrow a} f(x) \geq f(a) + 2\varepsilon$, co przeczy definicji U .

($\impliedby$) Nie wprost istnieje takie t_0 , że $A = \{x \in X : f(x) < t_0\} \notin \tau$. Wtedy istnieje $a \in A$ takie, że dla każdego otoczenia $U \ni a$ istnieje $x_U \in U \setminus A$, a więc $\sup_{x \in U} f(x) \geq f(x_U) \geq t_0$. Z tego wynika $\limsup_{x \rightarrow a} f(x) \geq t_0 > f(a)$, sprzeczność. $\square$

Propozycja 29. $f \in \mathcal{C}^\downarrow$ wtedy i tylko wtedy, gdy epigraf $\{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : t \geq f(x)\}$ jest domknięty.

Dowód. ($\implies$) Jeśli $(a, t) \in X \times \mathbb{R}$ nie jest w epigrafie, to $f(a) > t$ i $\{x \in X : f(x) > t\} \times (-\infty, t)$ jest otwartym otoczeniem (a, t) rozłącznym z epigrafem. Wobec dowolności (a, t) dopełnienie epigrafu jest otwarte.

($\impliedby$) Ustalmy $t \in \mathbb{R}$. Niech $a \in \{x \in X : f(x) > t\}$. Wtedy (a, t) nie jest w epigrafie, więc istnieje zbiór otwarty $U \times V$ zawierający (a, t) i zawarty w dopełnieniu epigrafu. W szczególności $U \subseteq \{x \in X : f(x) > t\}$, co wobec dowolności a daje otwartość. $\square$

Propozycja 30. Jeśli $f \in \mathcal{C}^\uparrow(X, \mathbb{R})$ a $K \subseteq X$ jest zwarty, to $f|_K$ osiąga maksimum (minimum dla półciągłości z dołu).

Propozycja 31. Niech $\Omega \in \text{top } \mathbb{K}^n$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}^m$ będzie klasy $\mathcal{C}^1$, $a \in \Omega$ oraz $\text{rg } f(a) = k$. W takiej sytuacji istnieje otoczenie $a \in U \subseteq \Omega$ takie, że dla każdego $x \in U$ mamy $\text{rg } f(x) \geq k$, a więc $\Omega \ni x \rightarrow \text{rg } f(x) \in \mathbb{R}$ jest półciągłe z dołu.

Dowód. Rozważmy następujący ciąg przekształceń:

- $x \in \Omega$ przekształcamy w macierz $A = d_x f$,
- macierzy A przypisujemy ciąg wszystkich jej minorów $k \times k$: $(A_1, \dots, A_p)$,
- ciągowi minorów $(A_1, \dots, A_p)$ przypisujemy ciąg ich wyznaczników $(t_1, \dots, t_p)$,
- liczymy sumę $\sum_{i=1}^p |t_i| \in \mathbb{R}$.

Całe to przekształcenie nazywamy σ . Jest ono ciągle (wybór minorów to zestawienie rzutowań, a pozostałe są oczywiste). $\sigma(x) \neq 0$ jest równoważne istnieniu niezerowego minoru rzędu k macierzy $d_x f$, a więc $\text{rg } f(x) \geq k$. Mamy więc $\sigma(a) \neq 0$ i z ciągłości σ to samo zachodzi w pewnym otoczeniu a , więc mamy tezę. $\square$

Wniosek. Jeśli różniczka odwzorowania f jest monomorfizmem (epimorfizmem), to jest nim w otoczeniu punktu a , to znaczy jeśli f jest immersją (submersją) w punkcie, to jest nią w całym otoczeniu.

Twierdzenie 51 (O submersji). Niech $X \simeq \mathbb{K}^n$, $Y \simeq \mathbb{K}^m$, $Z \simeq \mathbb{K}^{n-m}$ będą przestrzeniami unormowanymi (zakładamy, że $n \geq m$), $a \in X$. Niech $f : (X, a) \rightarrow Y$ będzie kielkiem klasy $\mathcal{C}^k$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty, \omega\}$ oraz niech $\pi : Y \times Z \rightarrow Y$ będzie rzutowaniem. W takiej sytuacji $d_a f$ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje kieltek $\mathcal{C}^k$ -dyfeomorfizmu $\varphi : (X, a) \rightarrow (Y \times Z, (f(a), 0))$ taki, że $f = \pi \circ \varphi$.

Dowód. $(\implies)$ $\dim \text{Im } d_a f = m$, czyli $\dim \ker d_a f = n - m$ i istnieje izomorfizm $h : \ker d_a f \rightarrow Z$. Zapiszmy $X = \ker d_a f \oplus \Lambda$ i niech ρ będzie rzutowaniem na pierwszą składową. Rozważmy odwzorowanie $\varphi = (f, h \circ \rho)$. Oczywiście $f = \pi \circ \varphi$.

Mamy $d_a \varphi = (d_a f, h \circ \rho)$, więc $\ker d_a \varphi = \ker d_a f \cap \ker(h \circ \rho) = \{0\}$, bo $\ker \rho = \Lambda$, a h jest izomorfizmem. Zatem $d_a \varphi$ jest monomorfizmem, czyli izomorfizmem ze zgodności wymiarów. Twierdzenie o lokalnym dyfeomorfizmie kończy.

$(\impliedby)$ $d_a f = \pi \circ d_a \varphi$, co jest złożeniem epimorfizmów. $\square$

Uwaga. Jeśli f jest submersją, to jest odwzorowaniem otwartym, bo φ i π są otwarte.

Odzyskujemy twierdzenie o rzędzie: $f \circ \varphi^{-1} = \pi$.

Twierdzenie 52 (O immersji). Niech $X \simeq \mathbb{K}^n$, $Y \simeq \mathbb{K}^m$, $W \simeq \mathbb{K}^{m-n}$ będą przestrzeniami unormowanymi (zakładamy, że $m \geq n$), $a \in X$. Niech $f : (X, a) \rightarrow Y$ będzie kielkiem klasy $\mathcal{C}^k$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty, \omega\}$ oraz niech $\iota : X \rightarrow X \times W$ będzie zanurzeniem. W takiej sytuacji $d_a f$ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje kieltek $\mathcal{C}^k$ -dyfeomorfizmu $\varphi : (X \times W, (a, 0)) \rightarrow (Y, f(a))$ taki, że $f = \varphi \circ \iota$.

Dowód. $(\implies)$ $\dim \text{Im } d_a f = n$, więc możemy zapisać $Y = \text{Im } d_a f \oplus \Lambda$ dla $\Lambda \simeq \mathbb{K}^{m-n}$. Istnieje izomorfizm $h : W \rightarrow \Lambda$. Rozważmy odwzorowanie $\varphi(x, w) = f(x) + h(w)$. Ewidentnie $\varphi \circ \iota = f$.

$d_{(a,0)} \varphi = d_a f \circ p_X + h \circ p_W$. Z własności sumy prostej $x, w \in \ker d_{(a,0)} \varphi \iff d_a f = 0 \wedge h(w) = 0$, a z monomorficzności $d_a f$ i h to zachodzi tylko, gdy $x, w = 0$. Zatem $d_{(a,0)} \varphi$ jest monomorfizmem, czyli izomorfizmem ze zgodności wymiarów. Twierdzenie o lokalnym dyfeomorfizmie kończy.

$(\impliedby)$ $d_a f = d_{(a,0)} \varphi \circ \iota$, co jest złożeniem monomorfizmów. $\square$

Uwaga. Jeśli f jest immersją, to jest odwzorowaniem otwartym na obraz (jeśli U jest otwarte, to $f(U)$ jest otwarte w obrazie f). Jeśli (X, τ) jest przestrzenią topologiczną a $h : U \rightarrow X$ jest (nawet) homeomorfizmem na obraz, to niekoniecznie $h(U) \in \text{top } X$. Zatem obraz immersji nie musi być

szczególnie ładny.

23. Podrozmaitości przestrzeni euklidesowej

2025-12-18

Notacja. Niech $0 \leq n \leq m$. Oznaczamy $\Lambda(n, m) = \{\lambda : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\} \mid \lambda \text{ silnie rosnąca}\}$. Dla $\lambda \in \Lambda(n, m)$ mamy jednoznacznie wyznaczone dopełnienie, to znaczy $\lambda' \in \Lambda(m - n, m)$ takie, że $\text{Im } \lambda \sqcup \text{Im } \lambda' = \{1, \dots, m\}$.

Przyjmijmy $\mathbb{K}_\lambda^n = \{(x_{\lambda(1)}, \dots, x_{\lambda(n)}) : x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m\}$, to znaczy $\mathbb{K}_\lambda^n = \sum_{i=1}^n \mathbb{K} e_{\lambda(i)}$.

Twierdzenie 53. Niech $a \in N \subseteq \mathbb{K}^m$, $0 \leq n \leq m$, $k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty, \omega\}$. Następujące warunki są równoważne.

1. Istnieje otoczenie $V \ni a$ i zbiór otwarty $W \subseteq \mathbb{K}^m$ oraz $\mathcal{C}^k$ -dyfeomorfizm $F : V \rightarrow W$, dla którego $N \cap V = F^{-1}(\mathbb{K}^n \times \{0\}^{m-n}) = F^{-1}(\{x \in W : x_{n+1} = \dots = x_m = 0\})$. Inaczej mówiąc $F(N \cap V) = (\mathbb{K}^n \times \{0\}^{m-n}) \cap W$. Dodatkowo $F(a) = 0$. Takie F nazywamy dyfeomorfizmem prostującym.
2. Istnieje otoczenie $V \ni a$ i submersja klasy $\mathcal{C}^k$ $h : V \rightarrow \mathbb{K}^{m-n}$ taka, że $h(a) = 0$ oraz $N \cap V = h^{-1}(0)$. Takie h nazywamy submersją opisującą.
3. Istnieje otoczenie $V \ni a$ oraz $\lambda \in \Lambda(n, m)$ i otwarte $U \subseteq \mathbb{K}_\lambda^n \subseteq \mathbb{K}^m$ oraz $f : U \rightarrow (\mathbb{K}_\lambda^n)^\perp$ klasy $\mathcal{C}^k$ takie, że $N \cap V = \Gamma_f = \{x + f(x) : x \in U\}$ (wykres).
4. Istnieje otoczenie $V \ni a$, $0 \in G \subseteq \mathbb{K}^n$ otwarte oraz immersja klasy $\mathcal{C}^k$ $g : G \rightarrow \mathbb{K}^m$ taka, że $g(G) = N \cap V$, $g(0) = a$ oraz $g : G \rightarrow N \cap V$ jest homeomorfizmem. Takie g nazywamy lokalną parametryzacją lub lokalnym układem współrzędnych.

Gdy zachodzi którykolwiek z tych warunków, to stożek styczny

$$C_a(N) = \{v \in \mathbb{K}^m : \exists (x_\nu)_{\nu \in N} : x_\nu \rightarrow a \exists (t_\nu)_{\nu \in N} : t_\nu > 0 \ t_\nu(x_\nu - a) \rightarrow v\}$$

jest n -wymiarową podprzestrzenią wektorową oraz zachodzi

$$C_a(N) = d_a F^{-1}(\mathbb{K}^n \times \{0\}^{m-n}) = \ker d_a h = \Gamma_{d_{a_\lambda} f} = \text{Im } d_0 g.$$

Dowód. Przypadek $n = 0$ jest trywialny, $n = m$ podobnie. Załóżmy więc $0 < n < m$.

(1 $\implies$ 2) Niech $F = (F_1, \dots, F_n, F_{n+1}, \dots, F_m)$. Oznaczamy $h = (F_{n+1}, \dots, F_m)$. V mamy razem z F z założenia, oczywiście $V \cap N = h^{-1}(0)$ i h jest klasy $\mathcal{C}^k$. Mamy $d_a F = \begin{bmatrix} \frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial x}(a) \\ d_a h \end{bmatrix}$, więc rząd $d_a h$ to $m - n$ i mamy submersję.

(2 $\implies$ 3) Bierzemy $h : V \rightarrow \mathbb{K}^{m-n}$ z założenia. Mamy $\text{rg } d_a h = m - n$, więc istnieje niezerowy minor $(m - n) \times (m - n)$, czyli wybór indeksów $\mu \in \Lambda(m - n, m)$ taki, że $\det \frac{\partial h}{\partial x_\mu}(a) \neq 0$. Z twierdzenia o funkcji uwikłanej zbiór $N \cap V = h^{-1}(0)$ jest (lokalnie, w otoczeniu a) wykresem funkcji klasy $\mathcal{C}^k$ postaci $x_\mu = f(x_{\mu'})$, gdzie $\mu' \in \Lambda(n, m)$ jest uzupełnieniem μ .

(3 $\implies$ 4) Niech $G = U$, $g : G \ni z \rightarrow (z, f(z)) \in \Gamma_f = N \cap V$. Jest to homeomorfizm klasy $\mathcal{C}^k$. $d_{a_\lambda} g = (\text{id}_{\mathbb{K}^n}, d_{a_\lambda} f)$, a więc jest to immersja.

(4 $\implies$ 1) Z twierdzenia o immersji dla g istnieje otoczenie $0 = g^{-1}(a) \in W \subseteq G$ oraz $U \ni a$ takie, że $g(W) \subseteq U$ oraz istnieje $\mathcal{C}^k$ -dyfeomorfizm $w : U \rightarrow w(U) \in \text{top } \mathbb{K}^m$ taki, że $(w \circ g)(z) = (z, 0) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^{m-n}$. Skoro g były homeomorfizmem na obraz, to $w^{-1}(\mathbb{K}^n \times \{0\}^{m-n}) = U \cap N$.

To kończy dowód pierwszej części. Z AM2 wiemy już, że mając (3) dostajemy $C_{(a_\lambda, f(a_\lambda))}(\Gamma_f) = \Gamma_{d_{a_\lambda} f}$, a to jest równe $C_a(N) = C_a(N \cap V)$. To już daje nam, że stożek styczny jest n -wymiarową podprzestrzenią liniową. Bez straty ogólności we wszystkich warunkach możemy wybrać jedno wspólne otoczenie $V \ni a$. Mamy $N \cap V = \Gamma_f = F^{-1}(\mathbb{K}^n \times \{0\}^{m-n}) = h^{-1}(0) = g(G)$.

Mamy $h(x_\lambda \oplus f(x_\lambda)) \equiv 0 \implies \ker d_a h \supseteq \Gamma_{d_{a_\lambda} f}$ i równość z równości wymiarów.

Oznaczmy $\Phi = (F_1, \dots, F_n)$ i $\Psi = (F_{n+1}, \dots, F_m)$. Mamy $d_a F = (d_a \Phi, d_a \Psi)$. $F(x_\lambda \oplus f(x_\lambda)) = (\Phi(x_\lambda \oplus f(x_\lambda)), 0)$, czyli $\Psi(x_\lambda \oplus f(x_\lambda)) \equiv 0$ i jak wyżej $\ker d_a \Psi \supseteq \Gamma_{d_{a_\lambda} f}$.

Wreszcie $h \circ g \equiv 0$, więc $d_a h \circ d_0 g = 0$ i $\text{Im } d_0 g \subseteq \ker d_a h$ i znowu równość. $\square$

Uwaga. Zauważmy, że w całym powyższym dowodzie sprawdzamy rząd różniczek w jednym punkcie a i to wystarczy na mocy półciągłości rzędu z dołu.

Definicja 45. W sytuacji z twierdzenia N jest w a n -wymiarową podrozmaitością $\mathbb{K}^m$ klasy $\mathcal{C}^k$, a stożek styczny, oznaczany teraz $T_a N$, jest elementem $G_n(\mathbb{K}^m)$ i jest jej przestrzenią styczną w a .

Uwaga. Własność bycia podrozmaitością jest własnością otwartą, to znaczy jeśli N jest taka w a , to jest również w $b \in U \cap N$ dla pewnego otoczenia $b \in U \subseteq \mathbb{K}^m$.

Jeśli N jest podrozmaitością $\mathbb{K}^m$, to jest rozmaitością zadaną przez atlas $(\mathbb{K}^m, \mathcal{D}_k(\{(\mathbb{K}^m, \text{id}_{\mathbb{K}^n})\}))$.

N zawsze rozważamy z topologią indukowaną. Z twierdzenia Brouwera wymiar N jest jednoznaczny. Dla ustalonej podrozmaitości N istnieje największa klasa, jakiej jest ta podrozmaitość.

O ile wykres funkcji klasy $\mathcal{C}^k$ jest podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$, o tyle implikacja w drugą stronę nie działa. Funkcja $\sqrt[3]{x}$ nie jest różniczkowalna w zerze, a jej wykres jest podrozmaitością analityczną.

Podrozmaitość topologiczną można zdefiniować poprzez pierwszy warunek z twierdzenia z homeomorfizmem w miejsce dyfeomorfizmu.

Podrozmaitość jest lokalnie domknięta, to znaczy dla $a \in N$ i otoczenia $U \ni a$ zbiór $U \cap N \subseteq U$ jest domknięty. Równoważnie brzeg $\partial N = \overline{N} \setminus N$ jest domknięty.

W twierdzeniu o rzędzie dla $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}^q$ klasy $\mathcal{C}^k$ stałego rzędu d otrzymujemy lokalnie dla każdego $a \in \Omega$ istnienie otoczeń $U \ni a$, $f(a) \in W$ takich, że $f(U) \subseteq W$. Wtedy $f(U)$ jest podrozmaitością d -wymiarową klasy $\mathcal{C}^k$. $f^{-1}(y) \cap U$ jest podrozmaitością $(p-d)$ -wymiarową.

Zachodzi twierdzenie Whitney'a: każda rzeczywista rozmaitość abstrakcyjna m -wymiarowa daje się zanurzyć ze strukturą w przestrzeń $\mathbb{R}^{2m+1}$, to znaczy potraktować jak podrozmaitość $\mathbb{R}^{2m+1}$ (bez zmiany klasy). Twierdzenie nie zachodzi w przypadku zespolonym – jedyne podrozmaitości zwarte $\mathbb{C}^n$ to zbiory skończone, a na przykład sfera Riemanna $\hat{\mathbb{C}}$ jest zwarta i wymiaru 1.

24. Podrozmaitości z brzegiem

2026-01-08

Definicja 46. $\emptyset \neq N \subseteq \mathbb{R}^m$ jest n -wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ z brzegiem, jeśli dla każdego $a \in N$ istnieje otoczenie $V \ni a$ takie, że zachodzi jeden z wykluczających się warunków:

- istnieje $\mathcal{C}^k$ -dyfeomorfizm prostujący $F: V \rightarrow W \in \text{top } \mathbb{R}^m$, czyli taki, że $F(a) = 0$ oraz $F(N \cap V) = (\mathbb{K}^n \times \{0\}^{m-n}) \cap W$,
- istnieje $\mathcal{C}^k$ -dyfeomorfizm $\Phi: V \rightarrow U \in \text{top } \mathbb{R}^m$ taki, że $\Phi(a) = 0$ i $\Phi(N \cap V) = U \cap \{x \in \mathbb{R}^m : x_n \geq 0, x_{n+1} = \dots = x_m = 0\}$

oraz jeśli oznaczymy $\partial N = \{a \in N : \text{w } a \text{ zachodzi drugi warunek}\}$, to $\partial N \neq \emptyset$. Zbiór ∂N nazywamy brzegiem podrozmaitości N .

Uwaga. Powyższe warunki wykluczają się, bo gdyby istniały oba odwzorowania Φ i F , to $\Psi = \Phi \circ F^{-1}: W \rightarrow U$ jest $\mathcal{C}^k$ -dyfeomorfizmem pomiędzy otoczeniami 0 takim, że $\Psi(W \cap \mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}) = U \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}^{m-n}$, więc można go potraktować jako odwzorowanie $\mathbb{R}^n \supseteq \widetilde{W} \rightarrow \widetilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Skoro $d_0 \Psi$ jest monomorfizmem, to jest izomorfizmem, więc Ψ jest w otoczeniu zera odwzorowaniem otwartym, co przeczy temu, czym jest obraz Ψ , bo $\mathbb{H}_n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$ nie jest homeomorficzne z kulą $\mathbb{B}_n$.

Twierdzenie 54. Niech $N \subseteq \mathbb{R}^m$ będzie n -wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ z brzegiem. Wtedy $N \setminus \partial N$ jest n -wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$, a ∂N jest $(n-1)$ -wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$.

Dowód. Pierwsze oczywiste z definicji dyfeomorfizmu prostującego, a dla $a \in \partial N$ mamy $\partial N \cap V = \Phi^{-1}(U \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}^{m-n+1})$, bo dla $z \in U \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{>0} \times \{0\}^{m-n}$ istnieje otoczenie $U_z \subseteq U$ w którym każdy $x \in U_z$ ma $x_n > 0$, a z tego wynika, że jest w nim spełniony pierwszy warunek. Zatem mamy dyfeomorfizm prostujący, co dowodzi tezy. $\square$

Definicja 47. Ustalmy n -wymiarową podrozmaitość $N \subseteq \mathbb{K}^m$ klasy $\mathcal{C}^k$ oraz $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{K}^n$. Odwzorowanie $g : G \rightarrow \mathbb{K}^m$ nazywamy lokalną parametryzacją (lokalnym opisem, mapą odwrotną, lokalnym układem współrzędnych) klasy $\mathcal{C}^k$ dla N , gdy g jest immersją klasy $\mathcal{C}^k$ i istnieje $V \in \text{top } \mathbb{K}^m$ takie, że $g(G) = N \cap V$ i jest to homeomorfizm na $N \cap V$.

Definicja 48. Rodzinę $\{g_i\}_{i \in I}$ lokalnych parametryzacji podrozmaitości N klasy $\mathcal{C}^k$ nazywamy atlasem odwrotnym, jeżeli $\bigcup_{i \in I} g_i(G_i) = N$.

Propozycja 32. Każda podrozmaitość posiada atlas odwrotny mocy co najwyżej $\aleph_0$, a jeśli jest zwarta, to posiada nawet skończony atlas odwrotny.

Dowód. Skoro $N \subseteq \mathbb{K}^m$, to możemy wykorzystać drugi aksjomat przeliczalności, a więc własność Lindelöffa. $\square$

Twierdzenie 55 (O przejściach). Niech $N \subseteq \mathbb{K}^m$ będzie n -wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$, $V_j \in \text{top } \mathbb{K}^m$, $G_j \in \text{top } \mathbb{K}^n$ dla $j = 1, 2$. Niech $g_j : G_j \rightarrow N \cap V_j =: W_j$ będą dwiema lokalnymi parametryzacjami takimi, że $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ oraz $H_j = g_j^{-1}(W_1 \cap W_2) \subseteq G_j$. Odwzorowanie $\chi = g_2^{-1} \circ g_1|_{g_1^{-1}(U_1 \cap U_2)} : H_1 \rightarrow H_2$ jest $\mathcal{C}^k$ -dyfeomorfizmem.

Dowód. Oczywiście χ jest homeomorfizmem, więc iniekcją i wystarczy pokazać, że dla każdego $t \in H_1$ różniczka $d_t \chi$ jest izomorfizmem. $\square$

25. Stożki styczne i normalne

2026-01-08

Definicja 49. Niech $N \subseteq \mathbb{K}^m$ będzie n -wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$, $f : N \rightarrow \mathbb{K}^p$ funkcją. Mówimy, że f jest klasy $\mathcal{C}^\ell$ dla $1 \leq \ell \leq k$, jeśli dla każdego $a \in N$ istnieje lokalna parametryzacja g podrozmaitości N w punkcie a , przy której $f \circ g$ jest klasy $\mathcal{C}^\ell$.

Uwaga. W powyższej sytuacji $f \circ \tilde{g}$ jest klasy $\mathcal{C}^\ell$ dla dowolnej lokalnej parametryzacji $\tilde{g}$, bo $f \circ \tilde{g} = f \circ g \circ g^{-1} \circ \tilde{g}$.

Twierdzenie 56. Niech $N \subseteq \mathbb{K}^m$ będzie n -wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$, $f : N \rightarrow \mathbb{K}^p$ funkcją, a $1 \leq \ell \leq k$. Wówczas f jest klasy $\mathcal{C}^\ell$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in N$ istnieje otoczenie $a \in V \subseteq \mathbb{K}^m$ takie, że istnieje $f : V \rightarrow \mathbb{K}^p$ klasy $\mathcal{C}^\ell$ taka, że $f|_{V \cap N} = f|_{V \cap N}$.

Dowód. $\square$

Definicja 50. Dla $f : N \rightarrow \mathbb{K}^p$ klasy $\mathcal{C}^\ell$ na podrozmaitości klasy $\mathcal{C}^k$ możemy określić różniczkę $d_a f := d_a \tilde{f}|_{T_a N} : T_a N \rightarrow \mathbb{K}^p$, gdzie $\tilde{f}$ jest dowolnym rozszerzeniem klasy $\mathcal{C}^\ell$ na otoczenie punktu $a \in N$.

Definicja 51. Niech E będzie przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{K}$, $a \in E$ oraz $A \subseteq E$. Zbiór $S \subseteq E$ nazywamy rzeczywistym (odpowiednio zespolonym) stożkiem o wierzchołku w zerze, gdy $S \neq \emptyset$ oraz dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ (odpowiednio $\lambda \in \mathbb{C}$) zachodzi $\lambda S \subseteq S$.

Definicja 52. Stożek styczny Peany do A w punkcie a określamy jako

$$C_a(A) = \{v \in E \mid \exists (a_\nu) \subseteq A: a_\nu \rightarrow a \exists (\lambda_\nu): \lambda_\nu > 0 \lambda_\nu (a_\nu - a) \rightarrow v\}.$$

Propozycja 33. 1. $C_a(A) \neq \emptyset \iff a \in \bar{A}$.

2. Dla $a \in \bar{A}$ zbiór $C_a(A)$ jest stożkiem rzeczywistym.

3. Jeśli $0 \neq v \in C_a(A)$ i $v = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \lambda_\nu (a_\nu - a)$, to $\frac{a_\nu - a}{\|a_\nu - a\|} \rightarrow \frac{v}{\|v\|}$.

4. Stożek $S \subseteq E$ jest wyznaczony jednoznacznie przez swój ślad na $\mathbb{S}_E$, przy czym $S \cap \mathbb{S}_E = \emptyset \iff S = \{0\}$.

5. Jeśli a jest punktem izolowanym A , to $C_a(A) = \{0\}$.

6. Jeśli $a \in \text{int } A$, to $C_a(A) = E$.

7. $C_a(A)$ zależy wyłącznie od kielka (A, a) .

Propozycja 34. Niech F, G będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$, $E = F \times G$ z normą produktową oraz $A \subseteq E$. Jeśli istnieje otoczenie zera $U \subseteq E$ i $C > 0$ takie, że $U \cap A \subseteq \{(x, y) : \|y\| \leq C \|x\|\}$, to $C_0(A) \cap \{0\} \times G = \{0\}$. Implikacja w drugą stronę zachodzi, o ile $\dim G < +\infty$.

Dowód. □

Propozycja 35. Jeśli E, F są przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $f : (E, a) \rightarrow (F, b)$ jest ciągle w a , to jeśli f jest różniczkowalne w a , to istnieje podprzestrzeń wektorowa $\Lambda \subseteq E \times F$ taka, że $\dim \Lambda = \dim E$, $\Lambda \cap \{0\} \times F = \{0\}$ i $\Lambda = C_{(a,b)}(\Gamma_f)$. Przeciwna implikacja zachodzi, o ile $\dim E, \dim F < +\infty$.

Dowód. □

Twierdzenie 57. Niech $N \subseteq \mathbb{K}^m$ będzie n -wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$, $a \in N$, $v \in \mathbb{K}^m$. Następujące warunki są równoważne.

1. $v \in T_a N$.

2. Istnieje $\varepsilon > 0$ i $\gamma : \varepsilon \mathbb{D} \rightarrow N$ klasy $\mathcal{C}^k$ takie, że $\gamma(0) = a$ i $\gamma'(0) = v$.

3. $v \in C_a(N)$.

Dowód. □

Twierdzenie 58. Niech $\phi : (\mathbb{K}^m, a) \rightarrow (\mathbb{K}^n, b)$ będzie klasy $\mathcal{C}^1$, $a \in \bar{A}$, gdzie $A \subseteq \mathbb{K}^m$. W takiej sytuacji $d_a \phi(C_a(A)) \subseteq C_b(\phi(A))$, gdzie równość zachodzi, gdy $\ker d_a \phi \cap C_a(A) = \{0\}$ o ile ϕ jest określone w otoczeniu $\bar{A}$, które musi być zwarte lub $\phi|_{\bar{A}}$ jest właściwe (przeciwobraz zwartego jest zwarty) a do tego $\phi^{-1}(b) \cap \bar{A} = \{a\}$ (spełnia to na przykład dyfeomorfizm).

Dowód. □

Definicja 53. Dla stożka rzeczywistego $S \subseteq \mathbb{R}^n$ o wierzchołku w zerze definiujemy jego stożek normalny $N(S) = \{w \in \mathbb{R}^n : \forall v \in S \langle w, v \rangle \leq 0\}$. Gdy $S = C_a(A)$ stosujemy zapis $N_a(A) = N(C_a(A))$.

Uwaga. $N(S)$ jest stożkiem rzeczywistym, $N(S) \cap S = \{0\}$. Jeśli S jest podprzestrzenią wektorową, to $N(S) = S^\perp$.

Propozycja 36. Jeśli $a \in A \subseteq \mathbb{R}^m$ świadczy o wartości $d(x, A) = \inf \{\|x - a\| : a \in A\}$ w normie euklidesowej (przy ustalonym x), to $x - a \in N_a(A)$.

Dowód. Chcemy pokazać $\langle x - a, v \rangle \leq 0$ dla $v \in C_a(A) \setminus \{0\}$. Mamy $v = \lim_{\nu \rightarrow \infty} t_\nu (a_\nu - a)$ dla pewnych ciągów, wtedy $\|x - a_\nu\| \geq \|x - a\|$, bo $a_\nu \in A$. Po przeliczeniach mamy tezę. □

Definicja 54. Dla podrozmaitości $N \subseteq \mathbb{K}^m$ i punktu $a \in N$ określamy przestrzeń normalną do N w punkcie a jako $N_a N = (T_a N)^\perp$ (względem standardowego iloczynu skalarnego).

Uwaga. Jeśli N jest podrozmainością rzeczywistą, to $C_a(N) = T_a N$, więc $N_a N = N_a(N)$.

26. Ekstrema warunkowe

2026-01-12

Definicja 55. Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną. Rozważamy funkcję $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ i $Y \subseteq X$. Ekstrema funkcji $f|_Y$ nazywamy ekstremami warunkowymi na zbiorze Y .

Uwaga. Najlepiej bada się sytuację, gdy $X = \mathbb{R}^m$ a $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ jest podzbiorem „regularnym”, np. podrozmainością (przynajmniej kawałkami).

Przykład (Programowanie liniowe). Niech $f(x) = \langle c, x \rangle$ będzie formą liniową $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Niech $Y = \{x \in \mathbb{R}^m : \langle a_i, x \rangle \leq b_i, i = 1, \dots, n\}$. Można pokazać, że jeśli $f|_Y$ osiąga minimum, to osiąga je na $\partial_V Y$, gdzie V jest otoczką afiniczną Y (najmniejszą przestrzenią afiniczną zawierającą Y). Ponadto jeśli $f|_Y$ ma minimum lokalne w a , to jest to minimum globalne, co w tym wypadku jest równoważne $-c \in N_a(Y)$.

Twierdzenie 59 (Silny warunek konieczny). Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ będzie n -krotnie różniczkowalna w $a \in A \subseteq \mathbb{R}^m$, gdzie $m \geq 1$, $n \geq 2$. Zakładamy, że $d_a f = 0, \dots, d_a^{(n-1)} f = 0$. Niech $a \in S \subseteq A$ i $f|_S$ ma minimum (maksimum) lokalne w a . Wtedy dla każdego $v \in C_a(S)$ zachodzi $d_a^{(n)} f(v)^n \geq 0$ (odpowiednio ≤ 0).

Dowód. Wystarczy pokazać tezę dla minimum (dla maksimum rozważamy funkcję $-f$). Ustalmy $C_a(S) \ni v = \lim_{\nu \rightarrow \infty} t_\nu(a_\nu - a)$. Niech $h_\nu = a_\nu - a \rightarrow 0$. Z założenia $f(a + h_\nu) = f(a_\nu) \geq f(a)$ dla $\nu \gg 1$. Mamy $0 \leq f(a + h_\nu) - f(a) = \frac{1}{n!} d_a^{(n)} f(h_\nu)^n + \eta(h_\nu) \|h_\nu\|^n$. Zatem $0 \leq \frac{1}{n!} d_a^{(n)} f(t_\nu h_\nu) + \eta(h_\nu) \|t_\nu h_\nu\|^n \rightarrow \frac{1}{n!} d_a^{(n)} f(v)^n$. $\square$

Uwaga. W rozważanej sytuacji różniczka funkcji utożsamia się z gradientem, czyli kierunkiem najszybszego wzrostu funkcji. Ponadto jeśli $\nabla f(a) \neq 0$, to $(f^{-1}(f(a)), a)$ jest kielkiem C^1 -gładkiej hiperpowierzchni, do której $\nabla f(a)$ jest prostopadły w a .

Uwaga. Jeśli w poprzednim twierdzeniu S jest podrozmainością klasy C^1 , to otrzymujemy informację, że forma jednorodna $T_a S \ni v \rightarrow d_a^{(n)} f(v)^n \in \mathbb{R}$ jest nieujemna (niedodatnia).

Twierdzenie 60 (Słaby warunek konieczny). Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna w $a \in A \subseteq \mathbb{R}^m$ i $a \in N \subseteq A$, gdzie $N \subseteq \mathbb{R}^m$ jest podrozmainością klasy C^1 . Zakładamy, że $f|_N$ ma w a ekstremum lokalne. Wtedy $d_a f|_{T_a N} \equiv 0$.

Dowód. Ustalmy lokalną parametryzację $g : G \rightarrow V \cap N$. Wówczas $f \circ g$ ma ekstremum lokalne w $f^{-1}(a) \in G$, a że jest to funkcja różniczkowalna, to mamy warunek konieczny $0 = d_{g^{-1}(a)}(f \circ g) = d_a f \circ d_{g^{-1}(a)} g$. To oznacza, że $d_a f(\text{Im } d_{g^{-1}(a)} g) = 0$, a ten zbiór to $T_a N$. $\square$

Uwaga. Powyższe twierdzenie nie zachodzi, gdy zbiór jest osobliwy i mamy do dyspozycji tylko stożek styczny. Niech $S : y^2 = x^3$. Wtedy $C_{(0,0)} S = [0, +\infty) \times \{0\}$. $f(x, y) = x$ ma minimum w $(0, 0)$, ale $d_{(0,0)} f = f$, co nie znika na stożku stycznym.

Uwaga. $N : y = x^3$ jest podrozmainością $\mathbb{R}^2$, $f(x, y) = y - x^3 + x^4$ ograniczamy do $f|_N = x^4$, co ma minimum w $a = (0, 0)$. Mamy $d_a f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$, ale na $T_a N = \mathbb{R} \times \{0\}$ się zeruje, $d_a^2 f = 0$. Forma $\frac{1}{3!} d_a^3 f \cdot (x, 0)^3 = -x^3$ nie jest nieujemna. Wynika to z faktu, że pierwsza pochodna nie zeruje wszędzie.

Uwaga. Mamy $N_a N = (T_a N)^\perp = \text{Lin} \{\nabla h_j(a) : j = 1, \dots, m - n\}$, gdzie h jest submersją opisującą. Zatem $d_a f|_{T_a N} = 0$ jest równoważne $\nabla f(a) \in N_a N$, a więc $\nabla f(a) = \sum_{j=1}^{m-n} \lambda_j \nabla h_j(a)$ dla pewnych $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-n} \in \mathbb{R}$ zwanych mnożnikami (multipliers) Lagrange’a.

Twierdzenie 61. Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ będzie n -krotnie różniczkowalna w $a \in A \subseteq \mathbb{R}^m$ dla $m \geq 1$, $n \geq 2$. Załóżmy, że $d_a f = 0, \dots, d_a^{(n-1)} f = 0$ i $a \in S \subseteq A$ oraz $d_a^{(n)} f(v)^n > 0$ (odpowiednio < 0) dla $v \in C_a(S) \setminus \{0\}$. Wtedy $f|_S$ ma w a silnie minimum (maksimum) lokalne.

Dowód. Zakładamy nie wprost, że $f|_S$ nie ma w a minimum lokalnego, a więc istnieje ciąg niezerowych wektorów $h_\nu \rightarrow 0$ taki, że $a + h_\nu \in S$ oraz $f(a + h_\nu) < f(a)$. Wektory $\frac{h_\nu}{\|h_\nu\|}$ są poprawnie określone i leżą na zwartym $\mathbb{S}^{m-1}$, więc ograniczając się do podciągu można założyć, że $\frac{h_\nu}{\|h_\nu\|} \rightarrow v \in \mathbb{S}^{m-1}$ i wtedy $v \in C_a(S) \setminus \{0\}$. Mamy $0 > f(a + h_\nu) - f(a) = \frac{1}{n!} d_a^{(n)} f(h_\nu)^n + \eta(h_\nu) \|h_\nu\|^n$, co po przemnożeniu przez $\frac{1}{\|h_\nu\|^n}$ i przejściu do granicy daje $\frac{1}{n!} d_a^{(n)} f(v)^n \leq 0$, co daje sprzeczność. $\square$

Uwaga. Jeśli w poprzednim twierdzeniu zbiór S jest podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$, to w założeniach mamy dodatnio (ujemnie) określoną formę jednorodną stopnia n $T_a N \ni v \rightarrow d_a^{(n)} f(v)^n \in \mathbb{R}$.

Propozycja 37. Niech $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ dla $i = 1, 2$ będą dwukrotnie różniczkowalne w $a \in A \subseteq \mathbb{R}^m$. Niech $N \subseteq \mathbb{R}^m$ będzie podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ taką, że $a \in N \subseteq A$ oraz $f_1|_N = f_2|_N$ i $d_a f_1 = d_a f_2$. Wtedy $d_a^2 f_1|_{\Delta(T_a N)} = d_a^2 f_2|_{\Delta(T_a N)}$, gdzie $\Delta(T_a N)$ oznacza przekątną.

Dowód. Funkcja $g = f_1 - f_2$ jest różniczkowalna w a , mamy $d_a g = 0$ i $g|_N \equiv 0$, więc ma ekstremum w a (minimum i maksimum). Zatem $T_a N \ni v \rightarrow d_a^2 g(v)^2 \in \mathbb{R}$ jest jednocześnie niedodatnie i nieujemne, czyli jest zerowe. $\square$

Pomysł. Mając $a \in N \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^m$, gdzie N jest podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ a $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna w a szukamy modyfikacji $\tilde{f}$ takiej, że $\tilde{f}|_N = f|_N$, ale $d_a \tilde{f} = 0$. Pokazaliśmy już, że niezależnie od wyboru $\tilde{f}$ forma zadana drugą różniczką nie zmienia się.

Przykład. Niech f będzie różniczkowalna w całym Ω . F będzie funkcją Lagrange'a (skojarzoną z f) zadaną przez $F : \Omega \times \mathbb{R}^{m-n} \ni (x, \lambda) \rightarrow f(x) - \sum_{j=1}^{m-n} \lambda_j h_j(x) \in \mathbb{R}$. F jest różniczkowalna i $\nabla F(x, \lambda) = \left[\nabla f(x) - \sum_{j=1}^{m-n} \lambda_j \nabla h_j \quad -h(x) \right]$. Ten gradient jest zerowy dokładnie, gdy $\nabla f(x) = \sum_{j=1}^{m-n} \lambda_j \nabla h_j(x)$ i $h(x) = 0$, a więc dokładnie, gdy $x \in N$ i $d_x f|_{T_x N} = 0$. Zatem zera ∇F wyznaczają wszystkie punkty N , w których $f|_N$ może mieć ekstremum lokalne.

Ustalmy punkt $\tilde{x}, \tilde{\lambda}$ taki, że $\nabla F(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) = 0$. Rozważmy funkcję różniczkowalną $\tilde{f} : \Omega \ni x \rightarrow F(x, \tilde{\lambda}) \in \mathbb{R}$. Oczywiście $\tilde{f}|_N = f|_N$ (bo $N = h^{-1}(0)$). Ponadto $d_{\tilde{x}} \tilde{f} = d_{\tilde{x}} f - \sum_{j=1}^{m-n} \tilde{\lambda}_j d_{\tilde{x}} h_j = 0$.

Jeżeli h i f są dwukrotnie różniczkowalne (przynajmniej) w znalezionym punkcie $\tilde{x}$, to możemy zbadać macierz Hesse'go $B = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_\kappa}(\tilde{x}) - \sum_{j=1}^{m-n} \tilde{\lambda}_j \frac{\partial^2 h_j}{\partial x_i \partial x_\kappa}(\tilde{x}) \right]_{i, \kappa=1, \dots, m}$ na $T_{\tilde{x}} N$, czyli formę kwadratową $T_{\tilde{x}} N \ni v \rightarrow v^T B v \in \mathbb{R}$. Wykorzystać możemy dodatkowo lokalną parametryzację $g : G \rightarrow V \cap N$. Zachodzi $T_{\tilde{x}} N = \text{Im } d_{g^{-1}(\tilde{x})} g$, a więc oznaczając macierz $C = d_{g^{-1}(\tilde{x})} g$ mamy do zbadania formę kwadratową $\mathbb{R}^n \ni w \rightarrow (Cw)^T B (Cw) \in \mathbb{R}$, a więc $W^T (C^T B C) w$. Ta macierz jest symetryczna, a więc dysponujemy kryteriami dodatniej (ujemnej) określoności.

Jeżeli f jest więcej razy różniczkowalna a $d_a^2 \tilde{f}$ znika na $\Delta(T_a N)$ to podobną metodą można otrzymać wielomiany pierwszego stopnia dające dalszą modyfikację $\tilde{\tilde{f}}$ taką, że $d_a^2 \tilde{\tilde{f}} = 0$.

27. Uzupełnienie

2026-01-19

Definicja 56. Odwzorowanie $r : X \rightarrow X$, gdzie X jest przestrzenią topologiczną, nazywamy retrakcją, gdy jest ciągle oraz $r \circ r = r$.

Propozycja 38. $r \circ r = r \iff r|_{r(X)} = \text{id}|_{r(X)}$.

Propozycja 39. Niech V będzie przestrzenią wektorową a $\ell : V \rightarrow V$ odwzorowaniem liniowym. Wtedy $\ell \circ \ell = \ell$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker \ell = \text{Im}(\ell - \text{id}_V)$.

Dowód. $(\implies) x \in \ker \ell \iff \ell(x) = 0 \iff x = x - \ell(x) = \ell(-x) - (-x) \in \operatorname{Im}(\ell - \operatorname{id}_V)$.

$(\impliedby) \ell(x) - x \in \ker \ell \implies \ell(\ell(x)) - \ell(x) = 0$. $\square$

Twierdzenie 62 (O retrakcji). Niech $D \subseteq \mathbb{K}^m$ będzie obszarem, $r : D \rightarrow D$ retrakcją klasy $\mathcal{C}^k$ dla $k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty, \omega\}$. W takiej sytuacji $r(D)$ jest domkniętą i spójną podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ obszaru D .

Dowód. $r(D) = \{x \in D : r(x) = x\}$ jest spójny z twierdzenia Darboux i domknięty z własności T_2 .

Różniczkując $r \circ r = r$ mamy $d_{r(x)} r \circ d_x r = d_x r$. Wobec $r(x) = x$ mamy $\ker d_x r = \operatorname{Im}(d_x r - \operatorname{id}_{\mathbb{K}^m})$. Ale $m = \dim \ker d_x r + \dim \operatorname{Im} d_x r = \dim \operatorname{Im}(d_x r - \operatorname{id}_{\mathbb{K}^m}) + \dim \operatorname{Im} d_x r = \operatorname{rg}(r - \operatorname{id})(x) + \operatorname{rg} r(x)$. Rząd jest półciągły z dołu – w otoczeniu może tylko wzrosnąć. Wobec stałości poprzedniej sumy oba jej składniki muszą być stałe, a więc dla każdego $a \in r(D)$ istnieje otoczenie $U_a \ni a$ w D takie, że dla wszystkich $x \in U_a \cap r(D)$ jest $\operatorname{rg} r = \operatorname{const}$. Wobec spójności $r(D)$ dostajemy, że rząd r jest stały na całym $r(D)$.

$\operatorname{rg}(r \circ r)(x) \leq \operatorname{rg} r(r(x)) = \operatorname{const} = \zeta_a$ dla wszystkich $r(x) \in U_a \cap r(D)$. Z ciągłości istnieje V_a takie, że $r(V_a) \subseteq U_a$. Czyli dla $x \in V_a$ mamy $\operatorname{rg} r(x) \leq \operatorname{rg} r(a)$. Z półciągłości z dołu mamy $a \in W_a \subseteq V_a$ takie, że dla $x \in W_a$ jest $\operatorname{rg} r(x) = \operatorname{rg} r(a)$. Ze spójności $r(D)$ mamy stałość rzędu na $U = \bigcup_{a \in r(D)} W_a$.

Stosując twierdzenie o rzędzie mamy $u \circ r \circ w(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0)$, co oznacza, że u jest dyfeomorfizmem prostującym $r(D)$. $\square$

Lemat 8 (Nash; 1952). Niech $\emptyset \neq N \subseteq \mathbb{R}^m$ będzie podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ dla $k \geq 2$. Istnieje otoczenie $N \subseteq U$ takie, że dla każdego $x \in U$ istnieje dokładnie jeden $m(x) \in N$ taki, że $\|x - m(x)\| = d(x, N)$ oraz funkcja $U \ni x \rightarrow m(x) \in \mathbb{R}^m$ jest klasy $\mathcal{C}^{k-1}$ (do tego można wybrać U domkniętą).

Dowód. Dla $a \in N$, $r > 0$ i każdego $x \in B(a, r)$ istnieje $N \in N \cap B(a, 2r)$ takie, że $d(x, N) = \|x - z\|$, czyli $d(x, N) = d(x, N \cap B(a, 2r))$.

Dla $x \in \mathbb{R}^m$, $z \in N$ takich, że $\|x - z\| = d(x, N)$ wiemy, że $x - z \in N_z N$. Rozważmy lokalną parametryzację $g : (G, 0) \rightarrow (N \cap V, a)$ klasy $\mathcal{C}^k$. Mamy $T_{g(t)} N = \operatorname{Im} d_t g = \operatorname{Lin} \left\{ \frac{\partial g}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial g}{\partial t_n}(t) \right\}$.

Wprowadzamy $F : V \times G \ni (x, t) \rightarrow \left(\left\langle x - g(t), \frac{\partial g}{\partial t_i}(t) \right\rangle \right)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, które jest klasy $\mathcal{C}^{k-1}$. Mamy $F(x, t) = 0 \iff x - g(t) \in N_{g(t)} N$. Możemy przyjąć, że $V = B(a, 2r)$ i $N \cap V$ jest domknięte w V .

Dla $x \in B(a, r)$ znajdziemy $t \in G$ takie, że $g(t) \in N \cap V$ realizuje $d(x, N)$. Wtedy $F(x, t) = 0$.

Ponadto $F(a, 0) = 0$. Mamy $\frac{\partial F}{\partial t}(a, 0) = (-1)^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} \left(\det \frac{\partial g}{\partial (t_{i_1}, \dots, t_{i_n})}(0) \right)^2 \neq 0$.

Z twierdzenia o funkcji uwikłanej mamy otoczenie $(a, 0) \in W \times T \subseteq B(a, 2r) \times G$ takie, że istnieje $\tau : W \ni x \rightarrow \tau(x) \in T$ klasy $\mathcal{C}^{k-1}$ takie, że $F(x, t) = 0 \iff t = \tau(x)$. Dobieramy $r_a > 0$ tak, by $B(a, 2r_a) \cap N \subseteq W \cap g(T)$. Wtedy dla $x \in B(a, r_a)$ istnieje $y \in B(a, 2r_a) \cap N \subseteq W \cap g(T)$ realizujące $d(x, N)$ i wówczas $F(x, g^{-1}(y)) = 0$, czyli $y = g(\tau(x))$.

Określamy $m_a(x) = g(\tau(x))$, $U = \bigcup_{a \in N} B(a, r_a)$, a odpowiednie funkcje sklejają się dzięki jednoznaczności z twierdzenia o funkcji uwikłanej. $\square$

Twierdzenie 63 (Poly, Roby; 1984). Niech $\emptyset \neq X = \overline{X} \subsetneq \mathbb{R}^m$, $\delta_X(x) = d(x, X)^2$, $k \geq 2$. Definiujemy zbiór punktów regularnych klasy $\mathcal{C}^k$ jako

$$\operatorname{Reg}_k X = \{a \in X : (X, a) \text{ jest kielkiem podrozmaitości klasy } \mathcal{C}^k\}.$$

Zachodzi $\operatorname{Reg}_k X = \{x \in \mathbb{R}^m : \exists U \ni x \text{ } \delta_X|_U \text{ jest klasy } \mathcal{C}^k\} \cap X$.

Definicja 57. Dla $\emptyset \neq X = \overline{X} \subsetneq \mathbb{R}^m$ oznaczamy $m_X(x) = \{z \in X : \|x - z\| = d(x, X)\}$. Szkieletem zbioru X (medial axis) nazywamy $M_X = \{x \in \mathbb{R}^m : |m_X(x)| > 1\}$.

Twierdzenie 64 (Clarke; 1975). Niech $\emptyset \neq X = \overline{X} \subsetneq \mathbb{R}^m$, $\delta_X(x) = d(x, X)^2$. M_X jest równy zbiorowi punktów nieróżniczkowalności funkcji δ_X .

Uwaga. $d(x, X)$ jest 1-lipschitzowska, więc δ_X jest lokalnie lipschitzowska, co z twierdzenia Rademachera mówi nam, że δ_X jest różniczkowalna prawie wszędzie (względem miary Lebesgue'a).