

MIARA I CAŁKA

NOTATKI

*„Nauka matematyki jest jak choroba psychiczna.”
„Są takie rzeczy, które nie istnieją. Na przykład całka Lebesgue’a.”*

MACIEJ MIKOŁAJCZAK
Kraków, 2025/2026

Spis treści

1. Podstawowe definicje	2
2. Miary i premiary	3
3. Konstrukcja Carathéodory'ego	6
4. Miara Lebesgue'a	8
5. Miary zupełne	10
6. Funkcje mierzalne	12
7. Całkowanie	15
8. Własności zachodzące prawie wszędzie	17
9. Ciągłość i różniczkowalność całek	19
10. Normy całkowite	21
11. Miary regularne	25
12. Absolutna ciągłość	26

1. Podstawowe definicje

Definicja 1. Niech X będzie niepustym zbiorem. Mówimy, że rodzina $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ jest $(\sigma\text{-})\cap$ -stabilna, jeśli $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$ (w wersji $\sigma : (A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{F} \implies \bigcap_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{F}$). Analogiczne definicje wprowadzamy dla innych operacji teoriomnogościowych.

Definicja 2. Mówimy, że $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ jest σ -algebrą, jeśli

1. $X \in \mathcal{F}$,
2. $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$,
3. $\mathcal{F}$ jest $\sigma\text{-}\cup$ -stabilna.

Przykład. σ -algebrami są:

1. $\mathcal{F} = \{\emptyset, X\}$,
2. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$,
3. $\mathcal{F} = \{A \subseteq X : A \text{ przeliczalny} \vee A^c \text{ przeliczalny}\}$,
4. Jeśli $G \subseteq \mathcal{P}(Y)$ jest σ -algebrą i $T : X \rightarrow Y$, to $T^{-1}(G)$ jest σ -algebrą.
5. Jeśli $\mathcal{F}$ jest σ -algebrą na X i $A \subseteq X$, to $\mathcal{F}_A = \{A \cap B : B \in \mathcal{F}\}$ jest σ -algebrą.

Propozycja 1. Przecięcie dowolnej niepustej rodziny σ -algebr na X jest σ -algebrą.

Definicja 3. Niech $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. σ -algebrą generowaną przez $\mathcal{E}$ nazywamy najmniejszą (w sensie inkluzji) σ -algebrę zawierającą $\mathcal{E}$. Wprowadzamy na nią oznaczenie $\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap_{\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}, \mathcal{F} \text{ } \sigma\text{-algebra}} \mathcal{F}$.

Przykład. 1. Jeśli $\mathcal{E}$ jest σ -algebrą, to $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.

2. Jeśli $A \subseteq X$, to $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, X\}$.

3. Dla $\text{Fin}(X) = \{B \subseteq X : |B| < \aleph_0\}$ mamy $\sigma(\text{Fin}(X)) = \{F \subseteq X : |F| \leq \aleph_0 \vee |F^c| \leq \aleph_0\}$.

Propozycja 2. Jeśli $\mathcal{F}$ jest σ -algebrą, to:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$,
2. $\mathcal{F}$ jest $\sigma\text{-}\cap$ -stabilna,
3. $\mathcal{F}$ jest $\cup, \cap, \setminus$ -stabilna.

Dowód. 1. $\emptyset = X^c$,

2. $(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{F} \implies \bigcap_{n=1}^\infty A_n = (\bigcup_{n=1}^\infty A_n^c)^c \in \mathcal{F}$,

3. $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup (\cap) B \cup (\cap) \emptyset \cup (\cap) \emptyset \cup (\cap) \dots \in \mathcal{F}$, $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{F}$.

□

Definicja 4. Rodzinę $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nazywamy pierścieniem, jeśli

1. $\emptyset \in \mathcal{R}$,
2. $\mathcal{R}$ jest $\cup, \setminus$ -stabilna.

Propozycja 3. Każdy pierścień jest $\cap$ -stabilny.

Dowód. $A \cap B = (A \cup B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$.

□

Definicja 5. Algebrą nazywamy taki pierścień $\mathcal{A}$, że $X \in \mathcal{A}$.

Przykład. 1. Każda σ -algebra jest algebrą,

2. $\{F \subseteq X : |F| < \aleph_0 \vee |F^c| < \aleph_0\}$ jest algebrą, która nie jest σ -algebrą dla $|X| \geq \aleph_0$,

3. $\text{Fin}(X)$ jest pierścieniem, który nie jest algebrą dla $|X| = \infty$.

4. $\{\emptyset\}$ to pierścień.

Propozycja 4. $\mathcal{R}$ jest algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy $X \in \mathcal{R}$ oraz $\mathcal{R}$ jest $\cup$ -stabilne i zamknięte na branie dopełnień.

Dowód. ($\implies$) Mamy $X \in \mathcal{R}$, więc dla $A \in \mathcal{R}$ jest $A^c = X \setminus A \in \mathcal{R}$, pozostałe warunki są oczywiste.

($\impliedby$) Mamy $\emptyset = X^c \in \mathcal{R}$, dla $A, B \in \mathcal{R}$ jest $A \setminus B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c \in \mathcal{R}$. $\square$

Uwaga. Każdy pierścień jest Δ -stabilny (gdzie Δ to różnica symetryczna). Krotka $(\mathcal{R}, \Delta, \cap)$ jest pierścieniem w sensie algebraicznym.

Definicja 6. $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nazywamy układem Dynkina, jeśli

1. $X \in \mathcal{D}$,

2. $A \in \mathcal{D} \implies A^c \in \mathcal{D}$,

3. $\mathcal{D}$ jest σ - $\sqcup$ -stabilna (zamknięcie na przeliczalne sumy rozłącznych zbiorów).

Uwaga. Zamknięcie na dopełnienia w powyższej definicji można zastąpić zamknięciem na różnicę: dla $A, B \in \mathcal{D}$ takich, że $A \subseteq B$ zachodzi $B \setminus A \in \mathcal{D}$. Przy $X \in \mathcal{D}$ zamknięcie na dopełnienia z niej wynika, a mamy $B \setminus A = B \cap A^c = (B^c \cup A)^c$, i $B^c \cap A = \emptyset$, więc z ostatniego warunku mamy zamknięcie na różnicę przy zamknięciu na dopełnienia.

Przykład. 1. Każda σ -algebra jest układem Dynkina,

2. Dla $|X| = 2n$ rodzina $\mathcal{P}_{\text{even}}(X) = \{A \subseteq X : 2 \mid |A|\}$ jest układem Dynkina, ale dla $n > 1$ nie jest algebrą.

Definicja 7. Niech $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Przez $\delta(\mathcal{E})$ oznaczamy najmniejszy układ Dynkina zawierający $\mathcal{E}$, a przez $\sigma(\mathcal{E})$ najmniejszą algebrę zawierającą $\mathcal{E}$.

Twierdzenie 1. Układ Dynkina $\mathcal{D}$ jest σ -algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy jest $\cup$ -stabilny (równoważnie: $\cap$ -stabilny lub jest algebrą).

Dowód. ($\implies$) σ -algebra jest $\cup$ -stabilna.

($\impliedby$) Niech $(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{D}$. Oznaczmy $D_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$. Mamy $\bigcup_{n=1}^\infty D_n = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ oraz D_n są parami rozłączne. Do tego $D_n \in \mathcal{D}$, bo $\cup$ -stabilność i zamkniętość na dopełnienia daje nam zamkniętość na branie (dowolnych) różnic. Zatem $\bigcup_{n=1}^\infty D_n \in \mathcal{D}$, co kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 2. Jeśli $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ jest $\cap$ -stabilna, to $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$.

Dowód. Mamy $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$, bo każda σ -algebra jest układem Dynkina. Dla dowodu drugiej inkluzji wystarczy pokazać, że $\delta(\mathcal{E})$ jest $\cap$ -stabilna.

Dla każdego $D \in \delta(\mathcal{E})$ definiujemy $\mathcal{D}_D = \{Q \subseteq X : Q \cap D \in \delta(\mathcal{E})\}$. $\mathcal{D}_D$ jest układem Dynkina: mamy $X \in \mathcal{D}_D$, jeśli $A, B \in \mathcal{D}_D$ oraz $A \subseteq B$, to $(B \setminus A) \cap D = (B \cap D) \setminus (A \cap D) \in \delta(\mathcal{E})$. Na koniec $(\bigcup A_n) \cap D = \bigcup (A_n \cap D)$, co implikuje ostatni warunek z definicji układu Dynkina.

Dla każdego $E \in \mathcal{E}$ mamy $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_E$ (wynika z założenia twierdzenia), więc $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_E$. Z tego wynika, że dla każdego $D \in \delta(\mathcal{E})$ mamy $D \cap E \in \delta(\mathcal{E})$, czyli $E \in \mathcal{D}_D$, więc $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_D$ i $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_D$ dla dowolnego D . To kończy dowód. $\square$

2. Miary i premiary

2025-10-13

Definicja 8. Niech $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dowolną funkcję $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ nazywamy funkcją zbioru.

μ jest skończenie addytywna, jeśli dla dowolnych parami rozłącznych $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ takich, że $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$ mamy $\mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$.

μ jest przeliczalnie addytywna, jeśli dla rodziny parami rozłącznych zbiorów $(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ takich, że $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$ mamy $\mu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$.

Uwaga. Jeśli μ jest przeliczalnie addytywna i $\emptyset \in \mathcal{A}$, to μ jest skończenie addytywna.

Jeśli $\emptyset \in \mathcal{A}$ i $\mu \neq \infty$, to $\mu(\emptyset) = 0$, bo dla $A \in \mathcal{A}$ takiego, że $\mu(A) < \infty$ mamy $\mu(A) = \mu(A \cup \emptyset) = \mu(A) + \mu(\emptyset)$, czyli $\mu(\emptyset) = 0$.

Definicja 9. Mówimy, że $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ jest:

- premiarą, jeśli $\mathcal{R}$ jest pierścieniem, $\mu(\emptyset) = 0$ i μ jest przeliczalnie addytywna,
- premiarą skończenie addytywną (treścią), jeśli $\mathcal{R}$ jest pierścieniem, $\mu(\emptyset) = 0$ i μ jest skończenie addytywna,
- miarą, jeśli μ jest premiarą i $\mathcal{R}$ jest σ -algebrą,
- miarą skończenie addytywną, jeśli μ jest premiarą skończenie addytywną i $\mathcal{R}$ jest algebrą.

Przykład. Przy $\mathcal{R} = \mathcal{P}(X)$ dla ustalonego $x \in X$ delta Diraca $\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ jest miarą.

Definicja 10. Parę $(X, \mathcal{A})$ nazywamy przestrzenią mierzalną, jeśli $\mathcal{A}$ jest σ -algebrą nad X . Trójkę $(X, \mathcal{A}, \mu)$ nazywamy dodatkowo przestrzenią z miarą, jeśli $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ jest miarą.

Przestrzeń z miarą jest:

- skończona, jeśli $\mu(X) < \infty$,
- σ -skończona, jeśli istnieje taka rodzina $(A_n)_{n=1}^\infty$, że $\mu(A_n) < \infty$ i $\bigcup A_n = X$,
- probabilistyczna, jeśli $\mu(X) = 1$.

Przykład. 1. Jeśli $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ jest pod- σ -algebrą a $(X, \mathcal{B}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą, to $(X, \mathcal{A}, \mu|_{\mathcal{A}})$ jest przestrzenią z miarą.

2. Jeśli $Y \subseteq X$, to $(Y, \mathcal{B}_Y, \mu|_{\mathcal{B}_Y})$ jest przestrzenią z miarą.

3. Jeśli $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \{E \subseteq \mathbb{R} : |E| \leq \aleph_0 \vee |E^c| \leq \aleph_0\}$, to $\mu(E) = \begin{cases} 0, & |E| \leq \aleph_0 \\ 1, & |E^c| \leq \aleph_0 \end{cases}$ jest miarą.

4. Jeśli $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \{E \subseteq \mathbb{N} : |E| < \aleph_0 \vee |E^c| < \aleph_0\}$, to $\mu(E) = \begin{cases} 0, & |E| < \aleph_0 \\ 1, & |E^c| < \aleph_0 \end{cases}$ jest miarą skończenie addytywną.

5. Dla stałych $\alpha_n > 0$ i miar μ_n funkcja $\sum \alpha_n \mu_n$ jest miarą.

Propozycja 5. Każda skończenie addytywna premiera na pierścieniu $\mathcal{R}$ spełnia:

1. $\forall A, B \in \mathcal{R} \quad \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$,
2. $\forall A, B \in \mathcal{R} \quad A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$,
3. $\forall A, B \in \mathcal{R} \quad A \subseteq B, \mu(B) < \infty \implies \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$,
4. $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R} \quad \mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$,
5. Dla każdej rodziny zbiorów parami rozłącznych $(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{R}$ takiej, że $\bigcup A_n \in \mathcal{R}$ zachodzi $\mu(\bigcup A_n) \geq \sum \mu(A_n)$.

- Dowód.** 1. Mamy $\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B)$, $\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B)$, $\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B)$.
2. $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$.
3. Z poprzedniego.
4. Dla $B_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$ mamy $\mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^n B_i) = \sum_{i=1}^n \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$.
5. Mamy $\sum_{n=1}^N \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$. Przejście $N \rightarrow \infty$ daje tezę.

□

Definicja 11. Mówimy, że ciąg zbiorów $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ zbiega od dołu do E (co oznaczamy $E_n \nearrow E$), jeśli $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ i $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$. Podobnie ciąg zbiega od góry do E (oznaczenie $E_n \searrow E$), jeśli $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$ i $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = E$.

Twierdzenie 3. Dla premii skończenie addytywnej na pierścieniu $\mathcal{R}$ rozważmy następujące warunki:

1. μ jest premią.
2. Jeśli $\forall_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{R}$, $A \in \mathcal{R}$ i $A_n \nearrow A$, to $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.
3. Jeśli $\forall_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{R}$, $A \in \mathcal{R}$, $\exists_{n_0} \mu(A_{n_0}) < \infty$ i $A_n \searrow A$, to $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.
4. Jeśli $\forall_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{R}$, $\exists_{n_0} \mu(A_{n_0}) < \infty$ i $A_n \searrow \emptyset$, to $\mu(A_n) \rightarrow 0$.

Wówczas zachodzi $[(1) \iff (2)] \implies [(3) \iff (4)]$. Dodatkowo jeśli μ jest skończona na $\mathcal{R}$ (zawsze przyjmuje skończone wartości), to wszystkie warunki są równoważne.

Dowód. (1 $\implies$ 2) Niech $A_0 = \emptyset$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ dla $n \geq 1$. Zbiory $B_n \in \mathcal{R}$ są parami rozłączne i sumują się do A oraz $A_n = B_1 \cup \dots \cup B_n$. Mamy

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mu(B_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(B_1 \cup \dots \cup B_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(A_N).$$

(2 $\implies$ 1) Weźmy rodzinę $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ parami rozłącznych zbiorów taką, że $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$. Wtedy dla $B_n = A_1 \cup \dots \cup A_n$ mamy $B_n \in \mathcal{R}$ i $B_n \nearrow A$. Zatem $\mu(B_n) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j)$ jednocześnie zbiega do $\mu(A)$ i $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

(2 $\implies$ 3) Bez straty ogólności $n_0 = 1$. Wtedy $\mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$. Dodatkowo $A_n \searrow A$ implikuje $A_1 \setminus A_n \nearrow A_1 \setminus A$. Zatem $\mu(A_1 \setminus A_n) \rightarrow \mu(A_1 \setminus A) = \mu(A_1) - \mu(A)$ oraz $\mu(A_1 \setminus A_n) \rightarrow \mu(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

(3 $\implies$ 4) Oczywiście.

(4 $\implies$ 3) Mamy $A_n \setminus A \searrow \emptyset$, więc $\mu(A_n) - \mu(A) = \mu(A_n \setminus A) \rightarrow 0$.

(4 $\implies$ 2) Z $A_n \nearrow A$ dostajemy $A \setminus A_n \searrow \emptyset$, ze skończoności μ spełnione są założenia (4) i mamy $\mu(A) - \mu(A_n) = \mu(A \setminus A_n) \rightarrow 0$. □

Twierdzenie 4 (O jedyności miary). Niech $\mathcal{A}$ będzie σ -algebrą na X generowaną przez taką $\cap$ -stabilną rodzinę $\mathcal{G}$, że istnieje ciąg $(G_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{G}$ taki, że $G_n \nearrow X$ (taki ciąg nazywamy wyczerpującym). Jeżeli μ, ν są takimi miarami na $(X, \mathcal{A})$, że $\forall_{A \in \mathcal{G}} \mu(A) = \nu(A)$ oraz $\forall_{n \geq 1} \mu(G_n) = \nu(G_n) < \infty$, to $\mu = \nu$.

Jeżeli $\mu(X) = \nu(X) < \infty$, to założenie o istnieniu odpowiedniego ciągu można opuścić (bo wówczas $G_n = X$ działa).

Dowód. Niech $\mathcal{D}_n = \{A \in \mathcal{A} : \mu(G_n \cap A) = \nu(G_n \cap A)\}$. Mamy $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}_n$ dla każdego n , bo $\mathcal{G}$ jest $\cap$ -stabilna. Sprawdzimy, że $\mathcal{D}_n$ jest układem Dynkina.

$X \in \mathcal{D}_n$ jest oczywiste, jeśli $A \in \mathcal{D}_n$, to

$$\mu(G_n \cap A^c) = \mu(G_n \setminus A) = \mu(G_n) - \mu(G_n \cap A) = \nu(G_n) - \nu(G_n \cap A) = \dots = \nu(G_n \cap A^c).$$

Ustalmy parami rozłączne $(A_k)_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{D}_n$. Mamy

$$\mu\left(G_n \cap \bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^\infty G_n \cap A_k\right) = \sum_{k=1}^\infty \mu(G_n \cap A_k) = \sum_{k=1}^\infty \nu(G_n \cap A_k) = \nu\left(G_n \cap \bigcup_{k=1}^\infty A_k\right).$$

Zatem $\mathcal{D}_n$ jest układem Dynkina i $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{G}) = \delta(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{A}$, więc $\mathcal{D}_n = \mathcal{A}$ i $\mu(A \cap G_n) = \nu(A \cap G_n)$ dla każdego n i $A \in \mathcal{A}$. Mamy $A \cap G_n \nearrow A$, więc

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap G_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A \cap G_n) = \nu(A).$$

□

3. Konstrukcja Carathéodory'ego

2025-10-20

Definicja 12. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nazywamy półpierzścieniem na X , jeśli

1. $\emptyset \in \mathcal{S}$,
2. $\mathcal{S}$ jest $\cap$ -stabilna,
3. Dla $A, B \in \mathcal{S}$ zbiór $A \setminus B$ jest sumą rozłączną skończenie wielu elementów $\mathcal{S}$.

Przykład. 1. $J = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ jest półpierzścieniem na $\mathbb{R}$.

2. Jeśli $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ są przestrzeniami mierzalnymi, to $\{A \times B \subseteq X \times Y : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ jest półpierzścieniem.

Definicja 13. Funkcję $\lambda : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ nazywamy miarą zewnętrzną, jeśli

1. $\lambda(\emptyset) = 0$,
2. Jeśli $A \subseteq B \subseteq X$, to $\lambda(A) \leq \lambda(B)$,
3. Jeśli $(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{P}(X)$, to $\lambda(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \lambda(A_n)$.

Propozycja 6. Jeżeli ν jest premiarą na półpierzścieniu $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$, to

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^\infty \nu(S_k) : (S_k)_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{S}, A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty S_k \right\}.$$

jest miarą zewnętrzną taką, że $\mu^*|_{\mathcal{S}} = \nu$.

Dowód. Niech $S \in \mathcal{S}$. Wtedy mamy $\mu^*(S) \leq \nu(S) + \nu(\emptyset) + \dots = \nu(S)$. Z drugiej strony rozważmy dowolne $(S_k)_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{S}$ takie, że $S \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty S_k$. Mamy $S = \bigcup_{k=1}^\infty S \cap S_k$ i każde $S \cap S_k$ jest elementem $\mathcal{S}$. Definiujemy rodzinę rozłącznych zbiorów poprzez $D_1 = S \cap S_1$, $D_2 = (S \cap S_2) \setminus S_1$, $D_3 = ((S \cap S_3) \setminus S_2) \setminus S_1$ i tak dalej. Każdy z tych zbiorów jest sumą rozłączną skończenie wielu elementów $\mathcal{S}$. Zatem mamy $S = \bigsqcup_{m=1}^\infty B_m$ dla pewnych rozłącznych $B_m \in \mathcal{S}$.

Dla każdego B_m istnieje takie $S_{k(m)}$, że $B_m \subseteq S_{k(m)}$. Zauważmy, że $S_k \setminus \bigcup_{m:k(m)=k} B_m$ jest sumą rozłączną elementów $(E_i)_{i=1}^\ell \subseteq \mathcal{S}$. Wobec tego $\nu(S_k) = \sum_{i=1}^\ell \nu(E_i) + \sum_{m:k(m)=k} \nu(B_m)$, czyli $\sum_{m:k(m)=k} \nu(B_m) \leq \nu(S_k)$.

Mamy $\nu(S) = \sum_{m=1}^\infty \nu(B_m) = \sum_{k=1}^\infty \sum_{m:k(m)=k} \nu(B_m) \leq \sum_{k=1}^\infty \nu(S_k)$. Biorąc infimum dostajemy $\nu(S) \leq \mu^*(S)$. To dowodzi, że $\mu^*|_{\mathcal{S}} = \nu$ i $\mu^*(\emptyset) = 0$.

Jeśli $A \subseteq B$, to dla każdego $(S_k)_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{S}$ takiego, że $B \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty S_k$ mamy też $A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty S_k$. Wobec tego $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. Pozostało pokazać σ -subaddytywność. Niech $(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{S}$. Niech

$(S_{n,k})_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{S}$ będzie pokryciem A_n . Wtedy $(S_{n,k})_{n,k=1}^{\infty}$ pokrywa $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, a więc $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \nu(S_{n,k})$. Biorąc infimum dla każdego k dostajemy $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$. $\square$

Definicja 14. Niech λ będzie miarą zewnętrzną. Mówimy, że $A \subseteq X$ spełnia warunek Carathéodory'ego, jeśli dla każdego $Q \subseteq X$ mamy $\lambda(Q \cap A) + \lambda(Q \setminus A) = \lambda(Q)$.

Uwaga. Z subaddytywności miary zewnętrznej zawsze jest $\lambda(Q) \leq \lambda(Q \cap A) + \lambda(Q \setminus A)$. Do tego dla $\lambda(Q) = \infty$ druga nierówność też zawsze zachodzi. Zatem warunek Carathéodory'ego jest równoważny temu, że dla każdego $Q \subseteq X$ takiego, że $\lambda(Q) < \infty$ mamy $\lambda(Q) \geq \lambda(Q \cap A) + \lambda(Q \setminus A)$.

Propozycja 7. Niech λ będzie miarą zewnętrzną. Rodzina

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \text{ spełnia warunek Carathéodory'ego}\}$$

jest σ -algebrą taką, że $\lambda|_{\mathcal{A}}$ jest miarą. Zbiór $\mathcal{A}(\lambda)$ nazywamy σ -algebrą zbiorów λ -mierzalnych.

Dowód. Oczywiście $\emptyset \in \mathcal{A}$. Zapisując $\lambda(Q \cap A) + \lambda(Q \setminus A) = \lambda(Q \cap A) + \lambda(Q \cap A^c)$ widzimy, że $\mathcal{A}$ jest zamknięta na branie dopełnień. Ustalmy $A, B \in \mathcal{A}$. Zachodzi poniższa równość.

$$\lambda(Q) = \lambda(Q \cap A) + \lambda(Q \cap A^c) = \lambda(Q \cap A \cap B) + \lambda(Q \cap A \cap B^c) + \lambda(Q \cap A^c \cap B) + \lambda(Q \cap A^c \cap B^c)$$

Podstawiając pod Q zbiór $Q \cap (A \cup B)$ dostajemy

$$\lambda(Q \cap (A \cup B)) = \lambda(Q \cap A \cap B) + \lambda(Q \cap A^c \cap B) + \lambda(Q \cap A \cap B^c),$$

czyli $\lambda(Q) = \lambda(Q \cap (A \cup B)) + \lambda(Q \cap (A \cup B)^c)$, więc $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Załóżmy, że $A \cap B = \emptyset$. Wtedy $\lambda(Q \cap (A \cup B)) = \lambda(Q \cap A) + \lambda(Q \cap B)$, bo $A^c \subseteq B$ i $B^c \subseteq A$. Indukcyjnie dla rodziny rozłącznych zbiorów $\{A_n\}_{n=1}^n$ mamy $\lambda(Q \cap \bigsqcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \lambda(Q \cap A_k)$.

Niech $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ będzie rodziną rozłącznych zbiorów. Niech $B_n = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$. Oznaczmy $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Mamy $B_n \in \mathcal{A}$, więc

$$\lambda(Q) = \lambda(Q \cap B_n) + \lambda(Q \cap B_n^c) = \sum_{k=1}^n \lambda(Q \cap A_k) + \lambda(Q \cap B_n^c) \geq \sum_{k=1}^n \lambda(Q \cap A_k) + \lambda(Q \cap A^c),$$

gdzie nierówność to monotoniczność λ . Przechodząc $n \rightarrow \infty$ dostajemy

$$\lambda(Q) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(Q \cap A_k) + \lambda(Q \cap A^c) \geq \lambda\left(Q \cap \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \lambda(Q \cap A^c) = \lambda(Q \cap A) + \lambda(Q \cap A^c),$$

gdzie druga nierówność to σ -subaddytywność λ . Z uwagi do warunku Carathéodory'ego mamy $\lambda(Q) = \lambda(Q \cap A) + \lambda(Q \cap A^c)$. Widzimy więc, że $A \in \mathcal{A}$. Zatem $\mathcal{A}$ jest zamkniętym na sumy układem Dynkina, czyli σ -algebrą.

Dodatkowo poprzednia równość implikuje $\lambda(Q \cap A) + \lambda(Q \cap A^c) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(Q \cap A_k) + \lambda(Q \cap A^c)$, więc mamy przeliczalną addytywność $\lambda|_{\mathcal{A}}$ (podstawiając $Q = X$). W szczególności $\lambda|_{\mathcal{A}}$ jest miarą. $\square$

Twierdzenie 5 (Carathéodory). Jeżeli ν jest premiarą na półpierścieniu $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$, to istnieje taka miara μ na $\sigma(\mathcal{S})$, że $\mu|_{\mathcal{S}} = \nu$. Jeżeli istnieje taki ciąg $(S_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{S}$, że $S_n \nearrow X$ i $\nu(S_n) < \infty$ dla każdego $n \geq 1$, to μ jest jedyna.

Dowód. Zdefiniujmy miarę zewnętrzną

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \nu(S_k) : (S_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{S}, A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \right\}.$$

oraz σ -algebrę $\mathcal{A}$ zbiorów spełniających warunek Carathéodory'ego. Wystarczy pokazać $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$, bo wtedy $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{A}$ i funkcja $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{S})}$ jest miarą zgodną z ν . Jej jedyność wynika wprost z twierdzenia

o jedyności miary.

Ustalmy $A \in \mathcal{S}$ i wybierzmy dowolne $Q \subseteq X$. Możemy założyć, że $\mu^*(Q) < \infty$. Zatem dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $(Q_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{S}$, że $Q \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty Q_n$ i $\mu^*(Q) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^\infty \nu(Q_n)$. Mamy $A \cap Q_n \in \mathcal{S}$ oraz $Q_n \setminus A$ jest skończoną sumą rozłączną elementów $\mathcal{S}$, czyli $\nu(Q_n) = \nu(A \cap Q_n) + \sum_{i=1}^{k(n)} \nu(B_{n,i})$, gdzie $\{B_{n,i}\}_{i=1}^{k(n)}$ są rozłączne i $\bigsqcup_{i=1}^{k(n)} B_{n,i} = Q_n \setminus A$. Zatem

$$\mu^*(Q) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^\infty \nu(Q_n) = \sum_{n=1}^\infty \nu(A \cap Q_n) + \sum_{n=1}^\infty \sum_{i=1}^{k(n)} \nu(B_{n,i}) \geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A),$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z faktu, że $Q \cap A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty Q_n \cap A$ oraz $Q \setminus A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty \bigcup_{i=1}^{k(n)} B_{n,i}$. Zatem A spełnia warunek Carathéodory'ego (przechodzimy $\varepsilon \rightarrow 0$), czyli $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$, co kończy. $\square$

Definicja 15. Niech $(X, \mathcal{A}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Dla każdego $A \subseteq X$ definiujemy $\mu^0(A) = \inf \{\mu(B) : A \subseteq B, B \in \mathcal{A}\}$, co jest miarą zewnętrzną.

Definicja 16. Miarę zewnętrzną μ^* na X nazywamy regularną, jeśli dla każdego $Y \subseteq X$ istnieje takie $A \in \mathcal{A}(\mu^*)$, że $Y \subseteq A$ i $\mu^*(Y) = \mu^*(A)$.

Propozycja 8. Jeżeli $(X, \mathcal{A}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą, to μ^0 jest regularna. Mamy $\mu^0|_{\mathcal{A}} = \mu$ i $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}(\mu^0)$.

Dowód. Z monotoniczności miary natychmiast mamy $\mu^0|_{\mathcal{A}} = \mu$. Ustalmy $E \in \mathcal{A}$ i wybierzmy dowolne $T \subseteq X$. Dla każdego $A \in \mathcal{A}$ takiego, że $T \subseteq A$ mamy $\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E) \geq \mu^0(T \cap E) + \mu^0(T \setminus E)$. Biorąc infimum po wszystkich $A \supseteq T$ dostajemy $\mu^0(T) \geq \mu^0(T \cap E) + \mu^0(T \setminus E)$, czyli E spełnia warunek Carathéodory'ego i $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}(\mu^0)$. Pozostało pokazać regularność.

Ustalmy dowolne $Y \subseteq X$. Jeśli $\mu^0(Y) = \infty$, to musi być $\mu^0(X) = \infty$, więc $\mu^0(Y) = \mu^0(X)$. Dalej zakładamy $\mu^0(Y) < \infty$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ znajdziemy takie $A_n \in \mathcal{A}$, że $\mu(A_n) \leq \mu^0(Y) + \frac{1}{n}$ oraz $Y \subseteq A_n$. Wtedy $A = \bigcap_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$ oraz $Y \subseteq A$. Teraz

$$\mu^0(Y) \leq \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \leq \mu^0(Y).$$

$\square$

Definicja 17. Oznaczmy $\Delta = \{\alpha : \mathcal{P}(X) \rightarrow (0, \infty] : \alpha \text{ jest miarą zewnętrzną na } X\}$ oraz niech $\Lambda = \{(\mathcal{A}, \mu) : (X, \mathcal{A}, \mu) \text{ jest przestrzenią z miarą}\}$. Definiujemy $(\cdot)_c : \Delta \ni \alpha \rightarrow (\mathcal{A}(\alpha), \alpha_c) \in \Lambda$, gdzie $\alpha_c = \alpha|_{\mathcal{A}(\alpha)}$ oraz $(\cdot)^0 : \Lambda \ni (\mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mu^0 \in \Delta$.

Twierdzenie 6. Dla każdego $\alpha \in \Delta$ mamy $(\alpha_c)^0 = \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest regularna.

Dla każdego $(\cdot, \mu) \in \Lambda$ mamy $((\mu^0)_c)^0 = \mu^0$. Dla każdego $(\cdot, \mu) \in \Lambda$ mamy $(\mu^0)_c = \mu$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje regularna $\gamma \in \Delta$ z $\gamma_c = \mu$.

4. Miara Lebesgue'a

2025-10-27

Definicja 18. Niech $d \geq 1$. Dla dwóch elementów $a = (a_1, \dots, a_d), b = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d$ definiujemy $[a, b] = \prod_{j=1}^d [a_j, b_j]$. Oznaczmy $\mathbb{I}^d = \{[a, b] \subseteq \mathbb{R}^d : a, b \in \mathbb{R}^d\}$.

Lemat 1. Jeśli $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ i $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{P}(Y)$ są półpierścieniami, to $\mathcal{S} \times \mathcal{S}' = \{S \times S' : S \in \mathcal{S}, S' \in \mathcal{S}'\}$ jest półpierścieniem na $X \times Y$.

Dowód. Mamy $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}'$. Jeśli $A \times A', B \times B' \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}'$, to $(A \times A') \cap (B \times B') =$

$(A \cap B) \times (A' \cap B') \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}'$. Do tego

$$(A \times A') \setminus (B \times B') = ((A \setminus B) \times (A' \setminus B')) \sqcup ((A \cap B) \times (A' \setminus B')) \sqcup ((A \setminus B) \times (A' \cap B')).$$

Mamy $A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^k C_i$ oraz $A' \setminus B' = \bigsqcup_{j=1}^\ell D_j$, gdzie $\{C_i\}_{i=1}^k \subseteq \mathcal{S}$, $\{D_j\}_{j=1}^\ell \subseteq \mathcal{S}'$ są rodzinami rozłącznych zbiorów. Każdy ze składników, na które rozbiliśmy $(A \times A') \setminus (B \times B')$ jest więc rozłączną sumą elementów $\mathcal{S} \times \mathcal{S}'$, co kończy dowód. $\square$

Lemat 2. $\mathbb{I}^d$ jest półpierścieniem.

Dowód. Dla $d \geq 2$ mamy $\mathbb{I}^d = \mathbb{I}^{d-1} \times \mathbb{I}^1$, więc wystarczy pokazać tezę dla $\mathbb{I}^1$. Mamy $\emptyset = [1, 1) \in \mathbb{I}^1$. Dla $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ mamy $[a, b) \cap [a', b') = [\max(a, a'), \min(b, b')) \in \mathbb{I}^1$. Do tego

$$[a, b) \setminus [a', b') = \begin{cases} [a, b), & b \leq a' \vee b' \leq a \vee b' \leq a' \\ [a, a'), & a \leq a' < b \leq b' \\ [b', b), & a' \leq a < b' \leq b \\ [a, a') \cup [b', b), & a \leq a' < b' \leq b \end{cases}.$$

$\square$

Definicja 19. Niech funkcja $\lambda^d : \mathbb{I}^d \rightarrow [0, \infty)$ będzie dana wzorem

$$\lambda^d([a, b)) = \begin{cases} \prod_{j=1}^d (b_j - a_j), & [a, b) \neq \emptyset \\ 0, & [a, b) = \emptyset \end{cases}.$$

Lemat 3. λ^d jest premiarą na $\mathbb{I}^d$.

Dowód. Udowodnimy dla $d = 1$, większe wymiary to tylko techniczne uogólnienie. Dla $a < a' \leq b < b'$ mamy $\lambda([a, b')) = b' - a \leq b' - a' + b - a = \lambda([a', b')) + \lambda([a, b))$. Uogólniając na więcej przedziałów, jeśli $[a, b) \subseteq \bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i)$, to $\lambda([a, b)) \leq \sum_{i=1}^n \lambda([a_i, b_i))$.

Założmy, że $[a, b) = \bigsqcup_{n=1}^\infty I_n$, gdzie $I_n = [a_n, b_n)$. Zdefiniujmy $I_{n,\varepsilon} = [a_n - 2^{-n}\varepsilon, b_n)$ oraz $I_{n,\varepsilon}^0 = (a_n - 2^{-n}\varepsilon, b_n)$. Mamy $[a, b - \varepsilon) \subseteq [a, b - \varepsilon) \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty I_{n,\varepsilon}^0$. To ostatnie jest pokryciem otwartym zbioru zwartego, więc istnieje $N = N(\varepsilon)$ takie, że $[a, b - \varepsilon) \subseteq \bigcup_{n=1}^N I_{n,\varepsilon}^0 \subseteq \bigcup_{n=1}^N I_{n,\varepsilon}$. Teraz mamy

$$0 \leq \lambda([a, b)) - \sum_{n=1}^N \lambda([a_n, b_n)) = \varepsilon + \lambda([a, b - \varepsilon)) - \sum_{n=1}^N \lambda(I_{n,\varepsilon}) + \sum_{n=1}^N \frac{\varepsilon}{2^n} \leq 2\varepsilon,$$

gdzie pierwsza nierówność wynika z podobnych własności λ jak w pierwszym akapicie, a druga to zastosowanie udowodnionej w nim własności. Ta nierówność zachodzi dla każdego $N \geq N(\varepsilon)$, więc przechodząc $N \rightarrow \infty$ a następnie $\varepsilon \rightarrow 0$ mamy tezę. $\square$

Definicja 20. d -wymiarową miarą Lebesgue'a na $\mathbb{R}^d$ nazywamy miarę λ^d otrzymaną w wyniku zastosowania konstrukcji Carathéodory'ego do λ^d na $\mathbb{I}^d$. Miara ta jest jedyna na $\sigma(\mathbb{I}^d)$, bo mamy odpowiedni ciąg $\left(\prod_{j=1}^d [-n, n)\right)_{n=1}^\infty \nearrow \mathbb{R}^d$. Zbiory λ^d -mieralne nazywamy mierzalnymi w sensie Lebesgue'a na $\mathbb{R}^d$. Zbiór zbiorów λ^d -mieralnych oznaczamy $\mathcal{L}(\lambda^d)$.

Definicja 21. Niech τ będzie topologią na X . Zbiór $\mathcal{B}(X) = \sigma(\tau)$ nazywamy σ -algebrą zbiorów borelowskich na (X, τ) .

Lemat 4. Rodzina $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ jest generowana przez każdą z następujących rodzin zbiorów:

1. zbiory domknięte w $\mathbb{R}^d$,
2. zbiory zwarte w $\mathbb{R}^d$,
3. $\mathbb{I}^d$,

4. $\{Q \in \mathbb{I}^d : Q = [a, b), \forall_{j=1, \dots, d} a_j, b_j \in \mathbb{Q}\}$.

Dowód. 1. σ -algebry generowane odpowiednio przez zbiory otwarte i domknięte zawierają ich dopełnienia, czyli odpowiednio zbiory domknięte i otwarte.

2. Każdy zbiór zwarty jest domknięty, a dla zbioru domkniętego D zbiór $D \cap \overline{K}(0, n)$ jest zwarty, a suma takich zbiorów to D .

3. Mamy $[a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, b - \frac{1}{n}]$ oraz $[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a, b + \frac{1}{n}]$ i możemy tak zrobić na każdej współrzędnej.

4. Mamy $[a, b) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_m, b_n)$, gdzie $a_m \in (a - \frac{1}{m}, a)$, $b_n \in (b - \frac{1}{n}, b)$ i $a_m, b_n \in \mathbb{Q}$. □

Uwaga. Mamy $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathbb{I}^d) \subseteq \mathcal{A}(\lambda^{d^0})$. Zatem możemy mówić o mierze λ^d zdefiniowanej na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ poprzez rozszerzenie premiiary zdefiniowanej na $\mathbb{I}^d$.

Lemat 5. Rodzina $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ jest generowana przez każdą z następujących rodzin zbiorów:

1. $\{(-\infty, a) : a \in D\}$,
2. $\{(-\infty, a] : a \in D'\}$,
3. $\{[b, +\infty) : b \in D''\}$,
4. $\{[b, +\infty) : b \in D'''\}$,

gdzie $D, D', D'', D''' \subseteq \mathbb{R}$ są gęste.

Dowód. Mamy $(a, b) = (-\infty, b) \cap (-\infty, a]^c$. Możemy zapisać $(-\infty, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, b_n]$, gdzie $b_n \in (b, b + \frac{1}{n}) \cap D'$ oraz $(-\infty, a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, a_n]$, gdzie $a_n \in (a_n - \frac{1}{n}, a_n) \cap D$. W każdym z tych przeliczalnych przecięć i sum prawy kraniec może być zarówno otwarty, jak i domknięty. W związku z tym (1) i (2) generują przedziały otwarte, a każdy zbiór otwarty jest przeliczalną sumą przedziałów otwartych (przeliczalną, bo jeśli dla każdego $q \in \mathbb{Q}$ zawartego w zbiorze otwartym weźmiemy maksymalny przedział w nim zawarty zawierający q , to dostaniemy przeliczalną sumę przedziałów). Zatem (1) i (2) generują przedziały otwarte, a generowanie w drugą stronę jest proste. (3) i (4) są dopełnieniami (1) i (2). □

5. Miary zupełne

2025-11-03

Definicja 22. Mówimy, że miara μ jest miarą zupełną na $(X, \mathcal{A})$, jeśli dla każdego $A \in \mathcal{A}$ takiego, że $\mu(A) = 0$ mamy $B \in \mathcal{A}$ dla każdego $B \subseteq A$.

Twierdzenie 7. Jeżeli $(X, \mathcal{A}(\mu^*), \mu^*|_{\mathcal{A}(\mu^*)})$ jest przestrzenią mierzalną otrzymaną poprzez zastosowanie konstrukcji Carathéodory'ego do miary zewnętrznej μ^* , to μ^* jest zupełna na $\mathcal{A}(\mu^*)$.

Dowód. Niech $A \subseteq X$ będzie taki, że $\mu^*(A) = 0$. Mamy $\mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c) = 0 + \mu^*(T \cap A^c) \leq \mu^*(T)$, gdzie oba przejścia wynikają z monotoniczności miary zewnętrznej. Zatem A spełnia warunek Carathéodory'ego i $A \in \mathcal{A}(\mu^*)$. Do tego dla każdego $B \subseteq A$ mamy $\mu^*(B) = 0$, więc $B \in \mathcal{A}(\mu^*)$, co daje tezę. □

Definicja 23. Rodzinę $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nazywamy σ -ideałem, jeżeli

1. $\emptyset \in \mathcal{N}$.
2. Jeśli $A \in \mathcal{N}$ i $B \subseteq A$, to $B \in \mathcal{N}$.
3. Jeżeli $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{N}$, to $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{N}$.

Definicja 24. Niech $(X, \mathcal{A}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Zbiór

$$\mathcal{N}(\mu) = \{B \subseteq X : \exists A \in \mathcal{A} \mu(A) = 0 \wedge B \subseteq A\}$$

nazywamy σ -ideałem zbiorów miary zero.

Propozycja 9. $\mathcal{N}(\mu)$ jest σ -ideałem.

Dowód. Oczywiście $\mathcal{N}(\mu)$ jest zamknięty na branie podzbiorów i $\emptyset \in \mathcal{N}(\mu)$. Jeśli $(B_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{N}(\mu)$, to istnieje ciąg $(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ taki, że $B_n \subseteq A_n$ i $\mu(A_n) = 0$. Mamy $\mu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) = 0$, więc $\bigcup_{n=1}^\infty B_n \in \mathcal{N}(\mu)$. $\square$

Definicja 25. Niech $(X, \mathcal{A}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Zbiór

$$\mathcal{A}_\mu^* = \{B \subseteq X : \exists A \in \mathcal{A} A \triangle B \in \mathcal{N}(\mu)\}$$

nazywamy σ -algebrą zbiorów prawie należących do $\mathcal{A}$.

Propozycja 10. $\mathcal{A}_\mu^*$ jest σ -algebrą.

Dowód. Mamy $\emptyset \triangle \emptyset = \emptyset$, więc $\emptyset \in \mathcal{A}_\mu^*$. Jeśli $B \in \mathcal{A}_\mu^*$, to istnieje $A \in \mathcal{A}$ takie, że $A \triangle B \in \mathcal{N}(\mu)$. Mamy $A^c \triangle B^c = A \triangle B$, więc $B^c \in \mathcal{A}_\mu^*$. Jeśli $(B_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}_\mu^*$, to istnieje ciąg $(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ taki, że $A_n \triangle B_n \in \mathcal{N}(\mu)$. Mamy $(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) \triangle (\bigcup_{n=1}^\infty B_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty (A_n \triangle B_n) \in \mathcal{N}(\mu)$, więc $\bigcup_{n=1}^\infty B_n \in \mathcal{A}_\mu^*$. $\square$

Propozycja 11. Jeśli μ jest skończona na $(X, \mathcal{A})$, to dla $C, D \in \mathcal{A}$ mamy $|\mu(C) - \mu(D)| \leq \mu(C \triangle D)$.

Dowód. Mamy $C \subseteq D \cup C \setminus D$, więc $\mu(C) \leq \mu(D) + \mu(C \setminus D)$, czyli $\mu(C) - \mu(D) \leq \mu(C \setminus D) \leq \mu(C \triangle D)$. Drugiej nierówności dowodzimy identycznie. $\square$

Definicja 26. Mówimy, że $A, B \in \mathcal{A}$ są μ -prawie równe, jeżeli $\mu(A \triangle B) = 0$. Relację bycia μ -prawie równym oznaczamy $\stackrel{\mu}{\sim}$.

Propozycja 12. $\stackrel{\mu}{\sim}$ jest relacją równoważności.

Dowód. Zwrotność i symetria są oczywiste. Jeśli $A \stackrel{\mu}{\sim} B$ i $B \stackrel{\mu}{\sim} C$, to $A \triangle C \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$, więc $\mu(A \triangle C) = 0$ i $A \stackrel{\mu}{\sim} C$. $\square$

Definicja 27. Funkcję $d_\mu(A, B) = \mu(A \triangle B)$ nazywamy pseudometryką. Jest ona metryką na $\mathcal{A}/\stackrel{\mu}{\sim}$.

Lemat 6. Niech $(X, \mathcal{A}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Wtedy $\mathcal{A}_\mu^* = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}(\mu))$.

Dowód. Niech $B \in \mathcal{A}_\mu^*$. Wtedy istnieje $A \in \mathcal{A}$ takie, że $A \triangle B \in \mathcal{N}(\mu)$, a wtedy też $A \setminus B, B \setminus A \in \mathcal{N}(\mu)$. Zatem $B = (A \cup (B \setminus A)) \setminus (A \setminus B) \in \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}(\mu))$, czyli $\mathcal{A}_\mu^* \subseteq \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}(\mu))$. Wiemy, że $\mathcal{A}_\mu^*$ jest σ -algebrą i $\mathcal{A}, \mathcal{N}(\mu) \subseteq \mathcal{A}_\mu^*$, więc mamy też drugie zawieranie. $\square$

Definicja 28. Niech $(X, \mathcal{A}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Definiujemy $\bar{\mu} : \mathcal{A}_\mu^* \rightarrow [0, +\infty]$ wzorem $\bar{\mu}(B) = \mu(A)$, gdzie $A \in \mathcal{A}$ jest takie, że $A \triangle B \in \mathcal{N}(\mu)$. Taka definicja jest poprawna, bo różne A spełniające tę własność różnią się o zbiór miary 0.

Twierdzenie 8. $\bar{\mu}$ jest miarą zupełną na $\mathcal{A}_\mu^*$ i $\bar{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$.

Dowód. Jeśli dla $A \in \mathcal{A}_\mu^*$ mamy $B, C \in \mathcal{A}$ takie, że $A \triangle B, A \triangle C \in \mathcal{N}(\mu)$, to zachodzi $B \triangle C = A \triangle B \triangle A \triangle C \in \mathcal{N}(\mu)$, więc $\mu(B) = \mu(C)$ i $\bar{\mu}$ jest poprawnie określone oraz $\bar{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$.

Niech $(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}_\mu^*$ będą parami rozłączne oraz niech $B_n \in \mathcal{A}$ będzie takie, że $C_n = A_n \triangle B_n \in \mathcal{N}(\mu)$. Dla $i \neq j$ mamy $B_i \cap B_j \subseteq C_i \cup C_j$, bo jeśli $x \in B_i \cap B_j$ należy do A_i , to nie należy do A_j , więc albo $x \in C_j$, albo $x \in C_i$. Zatem $\mu(B_i \cap B_j) = 0$. Niech $D_n = B_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i$. Mamy $\mu(D_n) = \mu(B_n)$,

bo $\mu(B_n \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i) = 0$. Zatem $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$, czyli $\bar{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n)$ i $\bar{\mu}$ faktycznie jest miarą.

Jeśli $\bar{\mu}(B) = 0$, to istnieje $A \in \mathcal{A}$ takie, że $A \Delta B \in \mathcal{N}(\mu)$ i $\mu(A) = 0$. Dla każdego $C \subseteq B$ jest $A \Delta C \in \mathcal{N}(\mu)$, więc $C \in \mathcal{A}_{\mu}^*$, co daje zupełność. $\square$

Wniosek. Jeśli $(X, \mathcal{A}, \mu)$ i $(X, \mathcal{B}, \nu)$ są przestrzeniami z miarą takimi, że ν jest zupełna, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ i $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu$, to $\mathcal{A}_{\mu}^* \subseteq \mathcal{B}$ i $\nu|_{\mathcal{A}_{\mu}^*} = \bar{\mu}$.

Twierdzenie 9. Jeżeli μ jest miarą σ -skończoną, to $\mathcal{A}(\mu^0) = \mathcal{A}_{\mu}^* = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}(\mu))$.

Dowód. Mamy $\mathcal{A}_{\mu}^* \subseteq \mathcal{A}(\mu^0)$, bo $\mu^0|_{\mathcal{A}(\mu^0)}$ jest zupełna. Niech $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, gdzie $E_n \in \mathcal{A}$ są takie, że $\mu(E_n) < \infty$. Ustalmy $E \in \mathcal{A}(\mu^0)$. Do pokazania $E \in \mathcal{A}_{\mu}^*$ wystarczy pokazać $E \cap E_n \in \mathcal{A}_{\mu}^*$, zatem można bez straty ogólności założyć, że μ jest skończona. Z definicji $\mu^0(E)$ dostajemy ciąg $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ taki, że $\mu(A_n) \rightarrow \mu^0(E)$ oraz $E \subseteq A_n$. Możemy założyć, że ten ciąg jest zstępujący (przecinamy ze sobą pierwsze elementy), co da nam $A_n \searrow A$ dla pewnego $A \in \mathcal{A}$ i $\mu^0(E) = \mu(A) = \mu^0(A) = \mu^0(A \cap E) + \mu^0(A \setminus E)$, gdzie ostatnia równość to warunek Carathéodory'ego. Mamy $A \cap E = E$, więc z poprzednich równości wynika $\mu^0(A \setminus E) = 0$. Podobnie jak przedtem $\mu^0(A \setminus E) = \mu^0(A')$ dla pewnego $A' \in \mathcal{A}$, zatem $A \setminus E \in \mathcal{N}(\mu)$. Równość $E = A \setminus (A \setminus E)$ daje $E \in \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}(\mu))$, co kończy dowód. $\square$

Wniosek. Mamy $\mathcal{L}(\lambda^d) = (\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))_{\lambda^d}^*$. Miara Lebesgue'a otrzymana przedtem w konstrukcji Carathéodory'ego może też zostać uzyskana jako uzupełnienie $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda^d)$.

Propozycja 13. Zachodzi $\text{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) = \mathfrak{c}$ oraz $\text{card}(\mathcal{L}(\lambda)) = 2^{\mathfrak{c}}$.

Dowód. Pierwsza równość wynika z tego, że zbiory borelowskie powstają przez wielokrotne przeliczalne przecięcia i sumy przedziałów o końcach wymiernych, a tych jest continuum.

Druga równość wynika z faktu, że zbiór Cantora jest nieprzeliczalny i ma miarę Lebesgue'a 0, więc wszystkie jego podzbiory również są λ^1 -mieralne, co daje nam $2^{\mathfrak{c}}$ zbiorów. $\square$

Przykład (Vitali). Rozważmy relację równoważności na $[0, 1]$ zadaną przez $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Niech $V \subseteq [0, 1]$ zawiera dokładnie jednego reprezentanta każdej klasy równoważności. Niech $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem wszystkich liczb z $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$. Definiujemy $V_n = r_n + V$. Mamy $V_n \cap V_m = \emptyset$ dla $n \neq m$ oraz $[0, 1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \subseteq [-1, 2]$. Gdyby V był λ^1 -mieralny, to każdy V_n byłby λ^1 -mieralny oraz $\lambda^1(V_n) = \lambda^1(V)$. Mielibyśmy $1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^1(V) \leq 3$, ale ten szereg zbiega do 0 lub $+\infty$ – sprzeczność.

6. Funkcje mieralne

2025-11-17

Notacja. Dalej cały czas zakładamy, że $(X, \mathcal{A})$ i $(Y, \mathcal{B})$ to przestrzenie mieralne.

Definicja 29. Mówimy, że $f : X \rightarrow Y$ jest $(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ -mieralna (lub po prostu mieralna, jeśli σ -algebry są znane z kontekstu), jeśli dla każdego $B \in \mathcal{B}$ mamy $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Jeśli X i Y to przestrzenie topologiczne, to mówimy, że f jest borelowska, jeśli jest $(\mathcal{B}(X)/\mathcal{B}(Y))$ -mieralna.

Jeśli któraś z σ -algebr jest znana z kontekstu, to ją pomijamy. Czasem piszemy też $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$, by podkreślić σ -algebry.

Lemat 7. Złożenie funkcji mieralnych jest mieralne.

Dowód. $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$. Zatem $B = g^{-1}(C)$ i $A = f^{-1}(B)$ są w σ -algebrach. $\square$

Lemat 8. Jeśli $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ i $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$, to $f : X \rightarrow Y$ jest mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $C \in \mathcal{C}$ mamy $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$.

Dowód. ($\implies$) Oczywiste.

($\impliedby$) Niech $\mathcal{D} = \{B \in \mathcal{B} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$. Z założenia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$. Łatwo widzieć, że $\mathcal{D}$ jest σ -algebrą. $\square$

Wniosek. Jeśli $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, to f jest $(\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in \mathbb{Q}$ mamy $f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{A}$.

Wniosek. Jeśli X, Y to przestrzenie topologiczne, a $f : X \rightarrow Y$ jest ciągła, to jest też borelowska.

Definicja 30. Produktem σ -algebr $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ nazywamy $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\})$.

Propozycja 14. Niech X, Y będą przestrzeniami topologicznymi. Zachodzi inkluzja $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) \subseteq \mathcal{B}(X \times Y)$. Ponadto jeśli X, Y spełniają drugi aksjomat przeliczalności (np. są metryczne i ośrodkowe), to mamy równość.

Dowód. Rozważmy $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{B}(X) : A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)\}$. Mamy $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n) \times Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \times Y$ i $A^c \times Y = (A \times Y)^c$, więc $\mathcal{D}$ jest σ -algebrą. Mamy $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{D}$, bo $\mathcal{D}$ zawiera zbiory otwarte. Z tego wynika, że dla dowolnego $A \in \mathcal{B}(X)$ mamy $A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)$. W podobny sposób dla $B \in \mathcal{B}(Y)$ mamy $X \times B \in \mathcal{B}(X \times Y)$. Zatem $A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) \in \mathcal{B}(X \times Y)$. Z tego wynika żądana inkluzja.

Ustalmy bazy przeliczalne X, Y – odpowiednio $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$. Rodzina $\{U_i \times V_j : i, j \in \mathbb{N}_+\} = \{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest bazą topologii produktowej, więc dla zbioru otwartego $\mathcal{W}$ mamy $\mathcal{W} = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_{n(k)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{i(k)} \times V_{j(k)} \in \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$. Z tego wynika $\mathcal{B}(X \times Y) \subseteq \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$. $\square$

Definicja 31. Niech $\mathcal{F} \subseteq Y^X$. Definiujemy $\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\{f^{-1}(B) : f \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{B}\})$. Jest to najmniejsza σ -algebra, dla której wszystkie funkcje z $\mathcal{F}$ są mieralne. Piszemy $\sigma(f) = \sigma(\{f\})$.

Twierdzenie 10. Niech $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B}), (Y', \mathcal{B}')$ będą przestrzeniami mierzalnymi. Niech $f : X \rightarrow Y$ i $f' : X \rightarrow Y'$. Wtedy $F = (f, f') : X \rightarrow Y \times Y'$ jest $(\mathcal{A}/\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}')$ -mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy f i f' są mieralne.

Dowód. ($\implies$) Dla $B \in \mathcal{B}$ mamy $B \times Y' \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}'$. Zatem $\mathcal{A} \ni F^{-1}(B \times Y') = f^{-1}(B) \cap f'^{-1}(Y') = f^{-1}(B)$, czyli f jest mierzalna. Analogicznie pokazujemy dla f' .

($\impliedby$) Zbiór $\mathcal{C} = \{B \times B' : B \in \mathcal{B}, B' \in \mathcal{B}'\}$ generuje σ -algebrę produktową. Dla $C \in \mathcal{C}$ mamy $F^{-1}(C) = F^{-1}(B \times B') = f^{-1}(B) \cap f'^{-1}(B') \in \mathcal{A}$. $\square$

Wniosek. $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}' = \sigma(\{\pi_Y, \pi_{Y'}\})$. σ -algebra produktowa jest generowana przez rzutowania.

Twierdzenie 11. Jeżeli $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ są mieralne i $\alpha \in \mathbb{R}$, to $f + g, f \cdot g, \alpha f, \min(f, g), \max(f, g)$ są mieralne.

Dowód. Mamy $f + g = (+) \circ (f, g)$. Złożenie (f, g) jest $(\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mierzalne, a dodawanie jest ciągle, więc $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)/\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mierzalne. Wobec równości $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mamy mierzalność $f + g$. Pozostałych przypadków dowodzimy analogicznie. $\square$

Definicja 32. Rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych to $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, gdzie $+\infty$ i $-\infty$ są różne i nie należą do $\mathbb{R}$. Rozszerzamy porządek w naturalny sposób.

W topologii wynikającej z porządku zbiory postaci $[-\infty, a)$ i $(b, +\infty]$ są otwarte. Bazą takiej topologii jest $\{[-\infty, a), (b, +\infty], (a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Mamy $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\{[-\infty, a) : a \in \mathbb{Q}\})$.

Propozycja 15. $B^* \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \iff B^* = B \cup S$, gdzie $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ i $S \in \mathcal{P}(\{\pm\infty\})$.

Dowód. Rozważmy $\mathcal{D} = \{D \subseteq \overline{\mathbb{R}} : D = B \cup S, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), S \in \mathcal{P}(\{\pm\infty\})\}$. Mamy $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

oraz $\{-\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [-\infty, -n]$ i $\{+\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (n, +\infty]$, więc $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

Mamy $\emptyset \in \mathcal{D}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_n \cup S_n = (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_n) \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} S_n)$ oraz $(B \cup S)^c = (\mathbb{R} \setminus B) \cup (\mathcal{P}(\{\pm\infty\}) \setminus S)$, więc $\mathcal{D}$ jest σ -algebrą. Do tego $\mathcal{D}$ zawiera zbiory otwarte w $\overline{\mathbb{R}}$, więc mamy $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{D}$. $\square$

Uwaga. Definiujemy operacje na $\overline{\mathbb{R}}$ w sposób zgodny z intuicją. Nie definiujemy tylko sumy $-\infty + \infty$. Zakładamy $0 \cdot \pm\infty = 0$ oraz nie definiujemy $\frac{1}{\pm\infty}$.

Notacja. Oznaczamy $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(X) = \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ mierzalna}\}$. Jeśli $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, to pomijamy ciało w oznaczeniu. Do tego dla $u, v : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ oznaczamy $\{u \leq v\} = \{x \in X : u(x) \leq v(x)\}$ i podobnie dla znaków $<, =, \neq$.

Propozycja 16. Mamy $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(X) \iff \operatorname{Re} \varphi, \operatorname{Im} \varphi \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X)$.

Dowód. ($\implies$) $\operatorname{Re} \varphi$ i $\operatorname{Im} \varphi$ są rzutowaniami φ na odpowiednie współrzędne.

($\impliedby$) Mamy $\varphi = (+) \circ (\operatorname{Re} \varphi, i \operatorname{Im} \varphi)$, co jest mierzalne. $\square$

Lemat 9. Jeżeli $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X, \mathcal{A})$, to $\inf_{n \geq 1} f_n$, $\sup_{n \geq 1} f_n$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ (o ile istnieje dla każdego $x \in X$) są mierzalne.

Dowód. Mamy $\sup f_n = -\inf -f_n$ oraz z definicji $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} f_k$ i analogicznie $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} f_k$. Zatem wystarczy pokazać, że dla każdego $a \in \mathbb{R}$ mamy $(\inf_{n \geq 1} f_n)^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{A}$. Równość $(\inf_{n \geq 1} f_n)^{-1}([-\infty, a)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}([-\infty, a))$ kończy. $\square$

Definicja 33. Funkcję $f \in \mathcal{M}(X)$ nazywamy schodkową (prostą), jeśli zbiór wartości f jest skończony, czyli mamy $f(X) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq \mathbb{R}$. Można wtedy przyjąć $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ i zapisać $f(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{\{f=\alpha_j\}}(x)$. Takie przedstawienie nazywamy postacią kanoniczną funkcji schodkowej.

Definicja 34. Przez $\mathcal{E}^+(X, \mathcal{A}) = \mathcal{E}^+$ oznaczamy zbiór takich funkcji schodkowych $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, że $f(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}(x)$ dla $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ i mierzalnych $A_1, \dots, A_n$.

Dla $f \in \mathcal{E}^+$ i przy ustalonej mierze μ piszemy $I_{\mu}(f) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j)$.

Propozycja 17. Jeżeli $\{B_1, \dots, B_m\} \subseteq \mathcal{A}$ jest takim podziałem X , że dla pewnej $f \in \mathcal{E}^+$ i pewnych $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$ mamy $f(x) = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{B_j}(x)$, to $I_{\mu}(f) = \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(B_j)$. Inaczej mówiąc, ta wartość nie zależy od wyboru reprezentacji funkcji.

Dowód. Niech $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ będzie zbiorem wartości $f \in \mathcal{E}^+$ i niech $A_j = \{f = \alpha_j\}$. Wówczas

$$I_{\mu}(f) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j: \beta_j = \alpha_i} \beta_j \mu(B_j) = \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(B_j),$$

bo z faktu, że $\{B_1, \dots, B_m\}$ jest podziałem wynika, że dla każdego B_j istnieje jedyne A_i takie, że $B_j \subseteq A_i$. $\square$

Propozycja 18. Jeżeli $f, g \in \mathcal{E}^+$ i $a, b \geq 0$, to $I_{\mu}(af + bg) = aI_{\mu}(f) + bI_{\mu}(g)$ oraz $f \leq g \implies I_{\mu}(f) \leq I_{\mu}(g)$.

Dowód. Niech $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ oraz $g = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{B_j}$. Niech

$$\{C_1, \dots, C_{\ell}\} = \{A_i \cap B_j : A_i \cap B_j \neq \emptyset, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}.$$

Wtedy istnieją takie $\alpha'_1, \dots, \alpha'_{\ell}$ i $\beta'_1, \dots, \beta'_{\ell}$, że $f = \sum_{k=1}^{\ell} \alpha'_k \chi_{C_k}$ i $g = \sum_{k=1}^{\ell} \beta'_k \chi_{C_k}$. Wtedy

$$I_{\mu}(af + bg) = \sum_{k=1}^{\ell} (a\alpha'_k + b\beta'_k) \mu(C_k) = a \sum_{k=1}^{\ell} \alpha'_k \mu(C_k) + \sum_{k=1}^{\ell} \beta'_k \mu(C_k) = aI_{\mu}(f) + bI_{\mu}(g).$$

Dla $f \leq g$ mamy $I_\mu(g) = I_\mu(f) + I_\mu(g - f) \geq I_\mu(f)$, bo $I_\mu(g - f) \geq 0$ wynika z $g - f \geq 0$. $\square$

7. Całkowanie

2025-11-24

Definicja 35. Oznaczamy $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+(X, \mathcal{A}) = \{g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}} : g \geq 0\}$. Dla $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+$ definiujemy całkę funkcji g jako

$$\int g \, d\mu = \sup_{\mathcal{E}^+ \ni h \leq g} I_\mu(h) \in [0, +\infty].$$

Dla $A \in \mathcal{A}$ oznaczamy $\int_A g \, d\mu = \int \chi_A g \, d\mu$.

Uwaga. Jeśli g jest funkcją schodkową, to $\int g \, d\mu = I_\mu(g)$.

Propozycja 19. Dla $f, g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+$ mamy $f \leq g \implies \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$ oraz $\mu(\{f > 0\}) = 0 \implies \int f \, d\mu = 0$.

Dowód. Jeśli $f \leq g$, to dla funkcji schodkowej $h \leq f$ mamy też $h \leq g$, więc supremum w $\int g \, d\mu$ jest brane po większym zbiorze i $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

Jeśli $\mu(\{f > 0\}) = 0$, to dla funkcji schodkowej h takiej, że $h \leq f$ i $h \in \mathcal{E}^+$ mamy $\{h > 0\} \subseteq \{f > 0\}$, więc $\mu(\{h > 0\}) = 0$ i $I_\mu(h) = 0$. Z tego wynika, że $\int f \, d\mu = 0$. $\square$

Twierdzenie 12 (O zbieżności monotonicznej). Niech $(X, \mathcal{A}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Niech $(f_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+$ będzie taki, że $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ oraz $f_n(x) \rightarrow f(x)$ dla każdego x . Wówczas f jest mierzalna oraz $\int f_n \, d\mu \nearrow \int f \, d\mu$.

Dowód. f jest mierzalna jako granica funkcji mierzalnych. Dla każdego f_n mamy $f_n \leq f$, więc $\int f_1 \, d\mu \leq \int f_2 \, d\mu \leq \dots \leq \int f \, d\mu$, czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$. Z tego wynika też istnienie tej granicy. Wykażemy teraz drugą nierówność.

Niech $h = \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{A_j}$ będzie takie, że $h \leq f$. Ustalmy $\alpha \in (0, 1)$. Niech $E_n = \{\alpha h \leq f_n\} \in \mathcal{A}$. Mamy $\bigcup_{n=1}^\infty E_n = X$, bo dla $x \in X$ jeśli $h(x) = 0$, to oczywiście $x \in E_n$ dla każdego n , a w przeciwnym wypadku $\alpha h(x) < f(x)$ i istnieje takie n , że $\alpha h(x) \leq f_n(x) \leq f(x)$. Do tego oczywiście $E_n \subseteq E_{n+1}$. Mamy $\alpha \chi_{E_n} h \leq f_n$, więc

$$\alpha \sum_{j=1}^m \mu(E_n \cap A_j) \alpha_j = \int \alpha \chi_{E_n} h \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu.$$

Przechodząc $n \rightarrow \infty$ dostajemy $\alpha I_\mu(h) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$, więc idąc $\alpha \rightarrow 1$ mamy $I_\mu(h) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$. Biorąc supremum po wszystkich h dostajemy $\int f \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$. $\square$

Lemat 10. Jeżeli $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+$, to istnieje ciąg $(f_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{E}^+$ taki, że $f_n \nearrow g$. Jeśli g jest ograniczona, to zbieżność jest jednostajna.

Dowód. Ustalmy g i $n \geq 1$. Niech $A_n = \{g \geq n\}$. Dla każdego $i \in \{0, 1, \dots, n2^n - 1\}$ ustalamy $B_{n,i} = g^{-1}([i2^{-n}, (i+1)2^{-n}))$ i definiujemy $f_n = \left(\sum_{i=0}^{n2^n-1} i2^{-n} \chi_{B_{n,i}}\right) + n \chi_{A_n}$. Widać, że $f_n \leq g$. Jeśli $g(x) \leq m$ dla każdego x , to dla $n \geq m$ mamy $0 \leq g(x) - f_n(x) \leq 2^{-n}$, z czego wynika zbieżność jednostajna. Jeśli g nie jest ograniczona, to dla $m = g(x) \neq \infty$ ten sam argument daje nam zbieżność punktową, a dla $g(x) = \infty$ mamy $f_n(x) \rightarrow \infty$. $\square$

Twierdzenie 13 (O liniowości całki). Jeżeli $f, g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+$ i $a, b \geq 0$, to

$$\int (af + bg) \, d\mu = a \int f \, d\mu + b \int g \, d\mu.$$

Dowód. Niech $(f_n)_{n=1}^\infty$ i $(g_n)_{n=1}^\infty$ będą ciągami funkcji schodkowych punktowo zbieżnymi do f i g .

Niech $h_n = af_n + bg_n \nearrow af + bg$. Mamy

$$a \int f \, d\mu + b \int g \, d\mu \leftarrow aI_\mu(f_n) + bI_\mu(g_n) = I_\mu(af_n + bg_n) \rightarrow \int (af + bg) \, d\mu.$$

□

Twierdzenie 14 (Całkowanie szeregu wyraz po wyrazie). Jeżeli $(f_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{M}_\mathbb{R}^+$ i szereg $\sum_{n=1}^\infty f_n$ jest punktowo zbieżny, to jest mierzalny i

$$\int \sum_{n=1}^\infty f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int f_n \, d\mu.$$

Dowód. Zdefiniujmy $g_N = \sum_{n=1}^N f_n$. Mamy $g_N \rightarrow \sum_{n=1}^\infty f_n$, z czego wynika mierzalność tego szeregu. Mamy $g_N \nearrow \sum_{n=1}^\infty f_n$, więc

$$\sum_{n=1}^\infty \int f_n \, d\mu \leftarrow \sum_{n=1}^N \int f_n \, d\mu = \int g_N \, d\mu \rightarrow \int \sum_{n=1}^\infty f_n \, d\mu.$$

□

Wniosek. Jeśli $a_{n,k} \in \overline{\mathbb{R}}_+$ dla $n, k \in \mathbb{N}_+$, to

$$\sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty a_{n,k} = \sum_{k=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty a_{n,k}.$$

Dowód. Rozważamy σ -algebrę $\mathcal{P}(\mathbb{N}_+)$ nad $\mathbb{N}_+$ z miarą liczącą $\mu(A) = |A|$. Definiujemy ciąg funkcji $(f_n)_{n=1}^\infty$ zadany przez $f_n(k) = a_{n,k}$. Funkcja $g_{n,k} = f_n \chi_{\{1, \dots, k\}}$ jest prosta, mamy $\int g_{n,k} \, d\mu \nearrow \int f_n \, d\mu = \sum_{j=1}^\infty f_n(j)$. Zatem

$$\sum_{k=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty a_{n,k} = \int \sum_{n=1}^\infty f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty a_{n,k}.$$

□

Definicja 36. Niech μ będzie miarą na $(X, \mathcal{A})$, $g \in \mathcal{M}_\mathbb{R}^+$. Definiujemy miarę ν na $\mathcal{A}$ wzorem $\nu(A) = \int_A g \, d\mu$. Funkcję g nazywamy gęstością ν względem μ . Piszemy $\nu = g\mu$ lub $d\nu = d(g\mu)$, $\frac{d\nu}{d\mu} = g$.

Propozycja 20. Niech $g \in \mathcal{M}_\mathbb{R}^+$ i niech ν będzie miarą o gęstości g względem μ . Wtedy ν faktycznie jest miarą na $(X, \mathcal{A})$. Dla każdej $f \in \mathcal{M}_\mathbb{R}^+$ mamy $\int f \, d\nu = \int fg \, d\mu$. Jeśli $\eta = d\nu$ dla pewnego $d \in \mathcal{M}_\mathbb{R}^+$, to $\eta = (dg)\mu$.

Dowód. Niech $(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ będą rozłącznymi zbiorami i niech $A = \bigsqcup_{n=1}^\infty A_n$. Mamy $\chi_A g = \sum_{n=1}^\infty \chi_{A_n} g$, zatem

$$\nu(A) = \int \chi_A g \, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int \chi_{A_n} g \, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \nu(A_n).$$

Dodatkowo $\nu(\emptyset) = 0$, więc ν jest miarą. Jeśli $h \in \mathcal{E}^+$ i $h = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$, to

$$\int h \, d\nu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \nu(A_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int \chi_{A_i} g \, d\mu = \int \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} g \, d\mu = \int hg \, d\mu.$$

Niech $f \in \mathcal{M}_\mathbb{R}^+$ i niech $(s_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{E}^+$ będzie ciągiem zbieżnym do f . Mamy

$$\int f \, d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n \, d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n g \, d\mu = \int fg \, d\mu.$$

Jeśli $\eta = d\nu$, to mamy

$$\eta(A) = \int \chi_A d\nu = \int \chi_A dg d\mu,$$

zatem $\eta = (dg) \mu$. To kończy dowód. $\square$

8. Własności zachodzące prawie wszędzie

2025-12-01

Definicja 37. Niech $(X, \mathcal{A}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Mówimy, że własność $W(x)$ zachodzi μ -prawie wszędzie (μ -pw), jeśli istnieje $A \in \mathcal{A}$ takie, że $\mu(A) = 0$ i $\{x \in X : W(x) \text{ nie zachodzi}\} \subseteq A$.

Przykład. Dla $Y \subseteq X$ mamy $\chi_Y = 0$ μ -pw jeśli $\bar{\mu}(Y) = 0$.

Propozycja 21. Niech $g, f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+(X, \mathcal{A})$. Zachodzi

1. $\forall a \in (0, +\infty) \mu(\{f \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int f d\mu$ (nierówność Markowa).
2. $\int f d\mu < \infty \implies f < \infty$ μ -pw.
3. $\int f d\mu = 0 \iff f = 0$ μ -pw.
4. $f = g$ μ -pw implikuje $\int f d\mu = \int g d\mu$.

Dowód. 1. Ustalmy $a > 0$. Mamy $f \geq a \chi_{\{f \geq a\}}$, czyli $\int f d\mu \geq a \mu(\{f \geq a\})$.

2. Mamy $\{f = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f \geq n\}$. Z poprzedniego punktu $\mu(\{f \geq n\}) \leq \frac{1}{n} \int f d\mu \rightarrow 0$, więc $\mu(\{f = \infty\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{f \geq n\}) = 0$.

3. Jeśli $\int f d\mu = 0$, to $\mu(\{f \geq \frac{1}{n}\}) \leq n \int f d\mu = 0$. Zatem z $\{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f \geq \frac{1}{n}\}$ mamy $\mu(\{f > 0\}) = 0$. W drugą stronę już pokazaliśmy.

4. Mamy $\max(f, g) - \min(f, g) = 0$ μ -pw. Zatem

$$\int \max(f, g) d\mu = \int \min(f, g) d\mu + \int (\max(f, g) - \min(f, g)) d\mu = \int \min(f, g) d\mu.$$

W połączeniu z $\int \min(f, g) d\mu \leq \int f d\mu, \int g d\mu \leq \int \max(f, g) d\mu$ dostajemy $\int f d\mu = \int g d\mu$. $\square$

Lemat 11 (Fatou). Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+(X, \mathcal{A})$. Zachodzi

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Dowód. Mamy $\inf_{k \geq n} f_k(x) \nearrow \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, więc $\int \inf_{k \geq n} f_k d\mu \nearrow \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu$. Do tego dla każdego $p \geq n$ mamy $f_p \geq \inf_{k \geq n} f_k$, czyli $\int f_p d\mu \geq \int \inf_{k \geq n} f_k$. Zatem

$$\inf_{p \geq n} \int f_p d\mu \geq \int \inf_{k \geq n} f_k d\mu \rightarrow \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu.$$

Przechodząc $n \rightarrow \infty$ w lewej stronie nierówności mamy tezę. $\square$

Definicja 38. Niech $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A})$. Dla $f^+ = \max(f, 0)$ i $f^- = \max(-f, 0)$ zachodzi $f^+, f^- \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+(X, \mathcal{A})$. Definiujemy całkę $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$ zawsze, gdy to wyrażenie ma sens (czyli nie otrzymujemy wyrażenia $\infty - \infty$).

Mówimy, że $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A})$ jest całkowalna, jeśli $\int f^+ d\mu, \int f^- d\mu < \infty$. Wtedy $\int f d\mu$ istnieje i jest skończone.

Definicja 39. Definiujemy zbiór funkcji całkowalnych jako

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu) = \{f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}} : f \text{ jest całkowalna}\}.$$

Dodatkowo definiujemy jego podzbiór funkcji skończonych $\mathcal{L}^1(\mu) = \left\{ f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu) : f(X) \subseteq \mathbb{R} \right\}$.

Propozycja 22. Jeżeli $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ i $f = g - h$ dla $g, h \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$, to

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu = \int g \, d\mu - \int h \, d\mu.$$

Dowód. Mamy $f = f^+ - f^- = g - h$, więc $f^+ + h = g + f^-$. Zatem $\int f^+ \, d\mu + \int h \, d\mu = \int f^- \, d\mu + \int g \, d\mu$, czyli teza. $\square$

Definicja 40. Dla $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A})$ i $A \in \mathcal{A}$ definiujemy $\int_A f \, d\mu = \int \chi_A f \, d\mu$. Mamy $|\chi_A f| \leq |f|$, więc $\int_A \chi_A f \, d\mu$ istnieje jeżeli $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$.

Lemat 12. Niech $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. Następujące warunki są równoważne:

1. $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$.
2. $|f| \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$, czyli $\int |f| \, d\mu < \infty$.
3. Istnieje $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$, $g \geq 0$ takie, że $|f| \leq g$.

Dowód. (1 $\implies$ 2) Mamy $|f| = f^+ + f^-$, więc $\int |f| \, d\mu = \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu < \infty$.

(2 $\implies$ 3) $g = |f|$ działa.

(3 $\implies$ 1) Mamy $f^+, f^- \leq |f| \leq g$, więc $\int f^+ \, d\mu, \int f^- \, d\mu < \infty$. $\square$

Propozycja 23. Zachodzi

1. $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu) \implies \left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu$.
2. $\mathcal{L}^1(\mu)$ jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$ i $f \rightarrow \int f \, d\mu$ jest funkcjonałem liniowym.
3. Jeżeli $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$, $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A})$ i $f = g$ μ -pw, to $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ i $\int g \, d\mu = \int f \, d\mu$.
4. Jeżeli $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ i $f \leq g$ μ -pw, to $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

Dowód. 1. $\left| \int f \, d\mu \right| = \left| \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \right| \leq \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu = \int |f| \, d\mu$.

2. Jeżeli $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, to $\int |\alpha f + \beta g| \, d\mu \leq |\alpha| \int |f| \, d\mu + |\beta| \int |g| \, d\mu < \infty$. Zatem $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. To, że całka jest liniowa, już wiemy.

3. Mamy $\{|f| \neq |g|\} \subseteq \{f \neq g\}$, więc $|f| = |g|$ μ -pw i $\int |g| \, d\mu = \int |f| \, d\mu < \infty$ i $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$. W ten sam sposób $f^+ = g^+$ i $f^- = g^-$ μ -pw, więc

$$\int g \, d\mu = \int g^+ \, d\mu - \int g^- \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

4. Niech $h = \max(f, g)$. Mamy $h = g$ μ -pw, więc $h \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ i

$$\int g \, d\mu = \int h \, d\mu = \int f \, d\mu + \int (h - f) \, d\mu \geq \int f \, d\mu.$$

$\square$

Lemat 13. Jeżeli $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$, to istnieje $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ takie, że $f = g$ μ -pw.

Dowód. Z całkowalności f mamy $f \neq \pm\infty$ μ -pw, więc $f = \chi_{\{|f| < \infty\}} f$ μ -pw. $\square$

Lemat 14 (O uzupełnianiu dziedziny). Rozważmy ciąg funkcji $(f_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A})$. Zbiór $A = \{x \in X : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in \mathbb{R}\}$ jest mierzalny. Co więcej, funkcja $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem

$h(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), & x \in A \\ 0, & \text{wpp} \end{cases}$ jest mierzalna. Ta sama teza zachodzi, gdy dodatkowo żądamy, by odpowiednia granica należała do $\mathbb{R}$.

Dowód. Rozważmy funkcję $G(x) = (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$. Jest ona mierzalna jako zestawienie funkcji mierzalnych. Przekątna $\overline{\Delta} = \{(x, x) : x \in \overline{\mathbb{R}}\}$ jest domknięta (z własności T_2), więc borelowska. Zachodzi $A = G^{-1}(\overline{\Delta})$, bo istnienie granicy jest równoważne równości granicy dolnej i górnej. Zatem $A \in \mathcal{A}$. Niech $B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ będzie zbiorem borelowskim. Jeśli $0 \notin B$, to $h^{-1}(B) = A \cap \{x \in X : \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in B\}$, co jest mierzalne z mierzalności $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$. Jeśli $0 \in B$, to $h^{-1}(B) = X \setminus h^{-1}(\overline{\mathbb{R}} \setminus B)$ i możemy zastosować poprzedni argument do dopełnienia. To pokazuje, że h jest mierzalna.

Zauważmy, że dla $A' = \{x \in X : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in \mathbb{R}\}$ mamy $A' = G^{-1}(\overline{\Delta} \cap \mathbb{R}^2)$, zatem A' jest mierzalny. Reszta argumentu przebiega bez zmian. $\square$

Twierdzenie 15 (Lebesgue; o zbieżności zmajoryzowanej). Jeżeli $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}^1(\mu)$ i istnieje taka funkcja $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A})$, że dla μ -pw $x \in X$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ oraz istnieje $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+(X, \mathcal{A})$ taka, że $\int g d\mu < \infty$ i $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ -pw dla każdego n , to $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ oraz

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f - f_n| d\mu = 0.$$

Dowód. Mamy $|f - f_n| \leq 2g$ i $|f - f_n| \rightarrow 0$ μ -pw. Do tego $\int |f| d\mu \leq \int g d\mu < \infty$, więc $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Z lematu Fatou mamy

$$\begin{aligned} \int 2g d\mu &= \int \liminf_{n \rightarrow \infty} (2g - |f - f_n|) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (2g - |f - f_n|) d\mu = \\ &= \int 2g d\mu + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int -|f - f_n| d\mu = \int 2g d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int |f - f_n| d\mu \leq \int 2g d\mu. \end{aligned}$$

Zatem $0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int |f - f_n| d\mu \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int |f - f_n| d\mu \leq 0$, więc te wartości są równe i mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f - f_n| d\mu = 0$. Ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int f d\mu - \int f_n d\mu \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f - f_n| d\mu = 0.$$

$\square$

Uwaga. Korzystając z udowodnionego wcześniej lematu widzimy, jak uzyskać funkcję f . Zatem w celu zastosowania twierdzenia Lebesgue'a wystarczy upewnić się, że odpowiednia zbieżność zachodzi μ -pw.

9. Ciągłość i różniczkowalność całek

2026-01-06

Uwaga. Topologicznie $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, więc $\mathcal{B}(\mathbb{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Zatem $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ jest mierzalna dokładnie wtedy, gdy $\operatorname{Re}(f)$ i $\operatorname{Im}(f)$ są mierzalne.

Definicja 41. Piszemy $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f) \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})\}$ oraz $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}) \mid |f| \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)\}$.

Elementy $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ nazywamy funkcjami całkowalnymi. Definiujemy dla nich $\int f d\mu = \int \operatorname{Re}(f) d\mu + i \int \operatorname{Im}(f) d\mu \in \mathbb{C}$.

Lemat 15. $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mu) \iff \operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f) \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Dowód. ($\implies$) Dla każdego $z \in \mathbb{C}$ jest $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ i $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$, więc $|\operatorname{Re}(f)|, |\operatorname{Im}(f)| \leq |f|$.

($\impliedby$) Mamy $|f| = \left(\operatorname{Re}(f)^2 + \operatorname{Im}(f)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, więc $|f| \leq |\operatorname{Re}(f)| + |\operatorname{Im}(f)|$. $\square$

Propozycja 24. Niech $f \in \mathcal{L}_\mathbb{C}^1(\mu)$. Zachodzi:

1. $\operatorname{Re} \left(\int f \, d\mu \right) = \int \operatorname{Re}(f) \, d\mu$.
2. $\operatorname{Im} \left(\int f \, d\mu \right) = \int \operatorname{Im}(f) \, d\mu$.
3. $\overline{\int f \, d\mu} = \int \overline{f} \, d\mu$.
4. $\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu$.
5. $\mathcal{L}_\mathbb{C}^1(\mu)$ jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$ a $f \rightarrow \int f \, d\mu$ jest funkcjonałem liniowym.
6. dla $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}(X, \mathcal{A})}$ takiego, że $f = g$ μ -pw zachodzi $g \in \mathcal{L}_\mathbb{C}^1(\mu)$ i $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.

Dowód. Dowodu wymaga tylko (4), reszta wynika wprost z odpowiednich własności całek funkcji rzeczywistych. Mamy $\int f \, d\mu = \left| \int f \, d\mu \right| e^{i\psi}$ dla pewnego $\psi \in [0, 2\pi)$, więc dla $\varphi = 2\pi - \psi$ jest

$$\left| \int f \, d\mu \right| = e^{i\varphi} \int f \, d\mu = \operatorname{Re} \left(e^{i\varphi} \int f \, d\mu \right) = \int \operatorname{Re}(e^{i\varphi} f) \, d\mu \leq \int |e^{i\varphi} f| \, d\mu = \int |f| \, d\mu.$$

□

Uwaga. Wszystkie następne twierdzenia wypowiadamy dla $\mathbb{R}$. Większość z nich można wypowiedzieć też dla $\mathbb{C}$, a dowody nie wymagają praktycznie żadnych zmian.

Twierdzenie 16 (O ciągłości całki względem parametru). Niech $(X, \mathcal{A}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą, (E, d_E) przestrzenią metryczną, $f : E \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi_0 \in E$. Zakładamy, że dla każdego $\xi \in E$ funkcja $x \rightarrow f(\xi, x)$ jest mierzalna, dla μ -pw $x \in X$ funkcja $\xi \rightarrow f(\xi, x)$ jest ciągła w ξ_0 oraz istnieje $g \in \mathcal{L}_+^1(\mu)$ takie, że dla każdego $\xi \in E$ i μ -pw $x \in X$ zachodzi $|f(\xi, x)| \leq g(x)$. W takiej sytuacji funkcja $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $F(\xi) = \int f(\xi, x) \, d\mu(x)$ jest dobrze określona dla każdego $\xi \in E$ i jest ciągła w ξ_0 .

Dowód. $x \rightarrow f(\xi, x)$ jest mierzalna, a z całkowalności g również całkowalna, więc definicja $F(\xi)$ jest poprawna. Niech $(\xi_n)_{n=1}^\infty \subseteq E$ będzie ciągiem takim, że $\xi_n \rightarrow \xi_0$. Dla μ -pw $x \in X$ zachodzi $f(\xi_n, x) \rightarrow f(\xi_0, x)$. Z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej mamy zbieżność całek, a więc $F(\xi_n) \rightarrow F(\xi_0)$, co daje poszukiwaną ciągłość. □

Wniosek. Niech μ będzie taką miarą borelowską na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $\mu(\{x\}) = 0$. Dla każdego $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mu)$ funkcja $\mathbb{R} \ni \xi \rightarrow \int_{(-\infty, \xi]} \varphi \, d\mu$ jest ciągła.

Dowód. Niech $f : \mathbb{R}^2 \ni (\xi, x) \rightarrow \chi_{(-\infty, \xi]}(x) \varphi(x)$. Funkcja $\xi \rightarrow f(\xi, x)$ jest ciągła w $\xi_0 \in \mathbb{R}$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R} \setminus \{\xi_0\}$. Mamy $\mu(\{\xi_0\}) = 0$, więc ta funkcja jest ciągła dla μ -pw x . Do tego $|f(\xi, x)| \leq |\varphi(x)|$. Zatem $\xi \rightarrow \int \chi_{(-\infty, \xi]} \varphi \, d\mu$ jest ciągła. □

Definicja 42. Mówimy, że $A \in \mathcal{A}$ jest atomem miary μ na przestrzeni mierzalnej $(X, \mathcal{A})$, jeśli $\mu(A) > 0$ i dla każdego $B \subsetneq A$ jeżeli $B \in \mathcal{A}$, to $\mu(B) = 0$.

Definicja 43. Miarę μ nazywamy bezatomową, jeśli μ nie ma atomów.

Definicja 44. Mając daną $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ definiujemy $\hat{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ daną dla $\xi \in \mathbb{R}$ przez $\hat{\varphi}(\xi) = \int e^{i\xi x} \varphi(x) \, d\lambda(x)$. Wówczas $\hat{\varphi}$ jest ciągła. Nazywamy ją transformatą Fouriera φ .

Jeżeli μ jest miarą skończoną na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, to transformatą Fouriera μ nazywamy funkcję $\hat{\mu}(\xi) = \int e^{i\xi x} \, d\mu(x)$. Jest to funkcja ciągła i ograniczona na $\mathbb{R}$.

Definicja 45. Niech $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Niech $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i ograniczoną. Wówczas definiujemy splot tych funkcji jako $h * \varphi : \mathbb{R} \ni \xi \rightarrow \int \varphi(x) h(\xi - x) \, d\lambda(x) \in \mathbb{R}$, co jest poprawnie zdefiniowane, ciągłe i ograniczone.

Twierdzenie 17 (O różniczkowaniu pod znakiem całki). Niech $(X, \mathcal{A}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą, $I \subseteq \mathbb{R}$ przedziałem otwartym. Niech $f : I \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $u_0 \in I$ będą takie, że dla każdego $u \in I$

funkcja $x \rightarrow f(u, x)$ jest całkowalna, dla μ -pw $x \in X$ funkcja $u \rightarrow f(u, x)$ jest różniczkowalna w u_0 oraz istnieje $g \in \mathcal{L}_+^1(\mu)$ taka, że dla każdego $u \in I$ i μ -pw $x \in X$ zachodzi $|f(u, x) - f(u_0, x)| \leq g(x)|u - u_0|$. Wówczas funkcja $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $F(u) = \int f(u, x) d\mu(x)$ jest różniczkowalna w u_0 i zachodzi $F'(u_0) = \int \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x) d\mu(x)$.

Dowód. Ustalmy ciąg $(u_n)_{n=1}^\infty \subseteq I \setminus \{u_0\}$ taki, że $u_n \rightarrow u_0$. Niech $B \in \mathcal{A}$ będzie takie, że $\mu(B) = 0$ i dla $x \in X \setminus B$ istnieje $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(u_n, x) - f(u_0, x)}{u_n - u_0}$. Oznaczmy ten iloraz różnicowy przez $\varphi_n(x)$. Z lematu o uzupełnianiu dziedziny możemy przyjąć, że $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, \cdot)$ istnieje dla każdego $x \in X$ (i wynosi 0, gdy granica nie istnieje). Mamy $|\varphi_n(x)| \leq g(x)$. Zatem korzystając z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej dostajemy

$$F'(u_0) \leftarrow \frac{F(u_n) - F(u_0)}{u_n - u_0} = \int \frac{f(u_n, x) - f(u_0, x)}{u_n - u_0} d\mu(x) \rightarrow \int \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x) d\mu(x).$$

□

Wniosek. Niech $(X, \mathcal{A}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą, $I \subseteq \mathbb{R}$ przedziałem a $f: I \times X \rightarrow \mathbb{R}$ funkcją taką, że dla każdego $u \in I$ funkcja $x \rightarrow f(u, x)$ jest całkowalna, dla μ -pw $x \in X$ funkcja $u \rightarrow f(u, x)$ jest różniczkowalna na I oraz istnieje $g \in \mathcal{L}_+^1(\mu)$ taka, że dla każdego $u \in I$ i μ -pw $x \in X$ zachodzi $\left| \frac{\partial f}{\partial u}(u, x) \right| \leq g(x)$. Wówczas funkcja $F: I \ni u \rightarrow \int f(u, x) d\mu(x)$ jest dobrze określona i różniczkowalna na I oraz zachodzi $F'(u) = \int \frac{\partial f}{\partial u}(u, x) d\mu(x)$.

Dowód. Z twierdzenia o wartości średniej $|f(u, x) - f(u_0, x)| = \left| \frac{\partial f}{\partial u}(\xi, x) \right| |u - u_0| \leq g(x)|u - u_0|$. Zatem spełnione są wszystkie założenia twierdzenia o różniczkowaniu pod znakiem całki i mamy tezę. □

Propozycja 25. 1. Jeżeli $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ spełnia $\int |x\varphi(x)| d\lambda(x) < \infty$, to transformata Fouriera $\hat{\varphi}$ jest różniczkowalna i $\hat{\varphi}'(u) = i \int x e^{iux} \varphi(x) d\lambda(x)$.

2. Jeżeli $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy $\mathcal{C}^1$ oraz h, h' są ograniczone, to spłot $h * \varphi$ jest różniczkowalny oraz $(h * \varphi)' = h' * \varphi$.

3. Jeżeli $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$ oraz $h^{(k)}$ jest ograniczone dla każdego k , to spłot $h * \varphi$ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$.

Dowód. 1. Skończoność ten całki oznacza całkowalność, więc istnieje całkowalne $g(x)$ takie, że $g(x) \geq 0$ i $|x\varphi(x)| \leq g(x)$. Z tego mamy odpowiednie ograniczenie dla $\hat{\varphi}$, a więc $\hat{\varphi}$ jest różniczkowalna i zachodzi odpowiedni wzór.

2. Ograniczoność h i h' daje nam istnienie odpowiednich ograniczeń na funkcję pod całką z splocie, teza wynika z poprzedniego wniosku.

3. Wynika z wielokrotnej iteracji poprzedniego argumentu.

□

10. Normy całkowe

2026-01-09

Definicja 46. Mówimy, że $p, q \in [1, \infty]$ są wykładnikami sprzężonymi, jeśli $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Przyjmujemy tu, że $\frac{1}{\infty} = 0$, więc $p = \infty$, $q = 1$ są sprzężone.

Definicja 47. Niech $(X, \mathcal{A}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą a $p \geq 1$ liczbą rzeczywistą. Definiujemy zbiór funkcji, które są całkowalne w p -tej potędze jako

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^p(\mu) = \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}) : \int |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Definicja 48. Mówimy, że funkcja mierzalna $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona μ -pw jeżeli istnieje takie $C \in \mathbb{R}$, że $|f(x)| \leq C$ dla μ -pw $x \in X$.

Oznaczamy $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^\infty(\mu) = \{f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}) : f \text{ ograniczona } \mu\text{-pw}\}$.

Definicja 49. Dla $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ oraz $p \geq 1$ definiujemy $\|f\|_p = (\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$ przy konwencji $\infty^{\frac{1}{p}} = \infty$. Do tego definiujemy $\|f\|_\infty = \inf \{C \in [0, \infty] : \forall_{\mu\text{-pw } x \in X} |f(x)| \leq C\}$. Tę funkcję czasem nazywa się supremum istotnym (essential supremum).

Uwaga. Dla $p \in [1, \infty]$ zachodzi $f \in \mathcal{L}^p(\mu) \iff \|f\|_p < \infty$.

Definicja 50. Dla $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ definiujemy relację równoważności $f \sim g \iff f = g \text{ } \mu\text{-pw}$.

Uwaga. Z własności całki wynika fakt, że jeśli $f \sim g$, to $\|f\|_p = \|g\|_p$ dla $p \in [1, \infty]$.

Definicja 51. Dla $p \in [1, \infty]$ definiujemy przestrzeń ilorazową

$$L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) / \sim.$$

Uwaga. Elementami L^p są klasy równoważności funkcji, jednak często mówi się o „funkcjach w L^p ”, bowiem wiele rozumowań nie zależy od wyboru reprezentanta klasy.

Uwaga. Analogicznie definiujemy odpowiednie przestrzenie funkcji zespolonych $\mathcal{L}^p_\mathbb{C}(\mu)$ i $L^p_\mathbb{C}(\mu)$.

Lemat 16 (Nierówność Younga). Niech $1 < p, q < \infty$ będą wykładnikami sprzężonymi. Wówczas dla wszystkich $u, v \geq 0$ zachodzi $uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$. Równość zachodzi dokładnie wtedy, gdy $v = u^{p-1}$.

Twierdzenie 18 (Nierówność Höldera). Jeżeli $p, q \in [1, \infty]$ są wykładnikami sprzężonymi, $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, to $\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$. W szczególności jeżeli $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, to $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Dla $p, q < \infty$ równość zachodzi dokładnie wtedy, gdy $|f|^p$ i $|g|^q$ są liniowo zależne w $L^1(\mu)$, to znaczy istnieją takie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, że co najmniej jedno z nich jest niezerowe i $\alpha |f|^p + \beta |g|^q = 0$ μ -pw.

Dowód. Jeśli $\|f\|_p = 0$ lub $\|g\|_q = 0$, to $|fg| = 0$ μ -pw, bo zerowość całki implikuje zerowość funkcji. Zatem można założyć $\|f\|_p, \|g\|_q \neq 0$. Jeśli $p = 1$, $q = \infty$, to $|fg| \leq \|g\|_\infty |f|$ μ -pw, więc $\int |fg| d\mu \leq \|g\|_\infty \int |f| d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1$. Dalej zakładamy $p, q \neq \infty$.

Z nierówności Younga dla $u = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$, $v = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$ dostajemy $\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$. Całkując obustronnie mamy $\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int |fg| d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Równość zachodzi, gdy w nierówności Younga równość zachodzi μ -pw. Zatem musimy mieć $\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} = \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^{p-1}$, co po podniesieniu do potęgi $q = \frac{p}{p-1}$ daje $|g(x)|^q = \frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p} |f(x)|^p$. $\square$

Wniosek (Nierówność Cauchy'ego-Schwarza). Jeśli $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, to

$$\int |fg| d\mu \leq \left(\int |f|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |g|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wniosek. Jeżeli $\mu(X) < \infty$ oraz p, q to wykładniki sprzężone i $p > 1$, to dla każdej funkcji $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ zachodzi $\|f\|_1 \leq \mu(X)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p$. Zatem $\mathcal{L}^p(\mu) \subseteq \mathcal{L}^1(\mu)$ i $L^p(\mu) \subseteq L^1(\mu)$ dla $p \in (1, \infty]$.

Dowód. Wystarczy zastosować nierówność Höldera dla $g(x) = 1$. $\square$

Wniosek. Jeżeli $\mu(X) < \infty$ i $1 \leq r < r' < \infty$, to dla $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ jest $\|f\|_r \leq \mu(X)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}} \|f\|_{r'}$.

Dowód. Wystarczy zastosować poprzedni wniosek do $p = \frac{r'}{r}$ i funkcji $|f|^r$, mamy

$$\int |f|^r d\mu \leq \mu(X)^{1 - \frac{r}{r'}} \left(\int |f|^{r'} d\mu \right)^{\frac{r}{r'}},$$

co po obustronnym wzięciu pierwiastka r -tego stopnia daje tezę. $\square$

Wniosek. Jeżeli $\mu(X) < \infty$ i $1 \leq p < q \leq \infty$, to $\mathcal{L}^q(\mu) \subseteq \mathcal{L}^p(\mu)$ i $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$.

Dowód. Przypadek $q < \infty$ natychmiast wynika z poprzedniego, a $q = \infty$ wynika z tego, że przy ograniczonym $f(x)$ odpowiednie całki są skończone. $\square$

Wniosek. Jeżeli $\mu(X) = 1$, to dla $1 \leq p < q \leq \infty$ mamy $\|f\|_p \leq \|f\|_q$.

Propozycja 26 (Nierówność Jensena). Jeżeli $\mu(X) = 1$ oraz $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ jest funkcją wypukłą, to dla każdej funkcji $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ takiej, że $f \geq 0$ zachodzi $\tilde{\varphi}(\int f d\mu) \leq \int \tilde{\varphi} \circ f d\mu$, gdzie $\tilde{\varphi} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ jest rozszerzeniem φ przez $\tilde{\varphi}(\infty) = \infty$. W szczególności jeśli $\tilde{\varphi} \circ f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, to $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Z kolej jeśli $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ jest funkcją wklęsłą a f jest dodatkowo całkowalna, to $\int \psi \circ f d\mu \leq \psi(\int f d\mu)$. W szczególności $\psi \circ f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Dowód. Na początku wypowiedzmy kilka faktów o funkcjach wypukłych. Są one ciągle we wnętrzu swojej dziedziny. Jeśli dla $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wypukłej oznaczmy zbiór prostych leżących pod wykresem funkcji jako $E_\Phi = \{\ell : y \rightarrow cy + d \in \mathbb{R} \mid \forall y \in (a, b) \ell(y) \leq \Phi(y)\}$, to zachodzi $\Phi(x) = \sup_{\ell \in E_\Phi} \ell(x)$.

Zauważmy, że $\tilde{\varphi}$ jest wypukła. Mamy $\tilde{\varphi} \circ f(x) = \chi_{\{f=0\}}(x) \tilde{\varphi}(0) + \chi_{\{0 < f < \infty\}}(x) \varphi(f(x)) + \chi_{\{f=\infty\}}(x) \cdot \infty$, więc z ciągłości $\varphi|_{(0, \infty)}$ mamy mierzalność tej funkcji. Jeżeli $\int \tilde{\varphi} \circ f d\mu = \infty$, to teza zachodzi. Dalej zakładamy skończoność tej całki. Dla $\ell \in E_{\tilde{\varphi}}$ mamy $\ell(\int f d\mu) = c \int f d\mu + b = \int \ell \circ f d\mu \leq \int \tilde{\varphi} \circ f d\mu < \infty$. Biorąc supremum po $\ell \in E_{\tilde{\varphi}}$ dostajemy $\tilde{\varphi}(\int f d\mu) \leq \int \tilde{\varphi} \circ f d\mu$.

$-\psi$ jest wypukła, więc $\psi \circ f$ jest mierzalna (nie musimy dedefiniowywać ψ w nieskończoności, bo f jest μ -pw skończona). Dla $\ell(y) = cy + d \geq \psi(y)$ mamy $\int \psi \circ f d\mu \leq \int \ell \circ f d\mu = a \int f d\mu + b = \ell(\int f d\mu)$. Biorąc infimum po wszystkich takich ℓ dostajemy tezę. $\square$

Twierdzenie 19 (Nierówność Minkowskiego). Jeżeli $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ i $p \in [1, \infty]$, to $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ i $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Dowód. Dla $p = \infty$ teza wynika z nierówności trójkąta. Ustalmy $p \in [1, \infty)$. Mamy $|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$, gdzie druga nierówność wynika z rozpisania wzoru Newtona. Całkując stronami dostajemy $|f + g|^p \in \mathcal{L}^1(\mu)$, czyli $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Dla $p = 1$ nierówność wynika z nierówności trójkąta. Zatem można założyć $p > 1$. Niech $q = \frac{p}{p-1} < \infty$. Mamy

$$\begin{aligned} \int |f + g|^p d\mu &= \int |f + g| |f + g|^{p-1} d\mu \leq \int |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int |g| |f + g|^{p-1} d\mu \leq \\ &\|f\|_p \left\| (f + g)^{p-1} \right\|_q + \|g\|_p \left\| (f + g)^{p-1} \right\|_q = (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int |f + g|^{q(p-1)} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &(\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

Wartość $A = \left(\int |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}}$ jest skończona, bo $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Jeśli $A = 0$, to teza zachodzi. W przeciwnym wypadku wydzielimy obustronnie przez A , co daje tezę. $\square$

Twierdzenie 20. L_p jest przestrzenią unormowaną dla dowolnego $p \in [1, \infty]$. Dodatkowo L_2 jest przestrzenią z iloczynem skalarnym $\langle f, g \rangle = \int fg d\mu$ ($\langle f, g \rangle = \int f \bar{g} d\mu$ w $\mathbb{C}$).

Dowód. Nierówność Minkowskiego daje nierówność trójkąta, a pozostałe warunki są oczywiste. $\int fg \, d\mu$ spełnia własności iloczynu skalarnego, odpowiadająca mu norma to właśnie $\|\cdot\|_2$. $\square$

Lemat 17. Jeżeli $(f_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{L}^p(\mu)$ dla $p \in [1, \infty)$ i $f_n \geq 0$ dla każdego n , to $\|\sum_{n=1}^\infty f_n\|_p \leq \sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p$.

Dowód. Ustalmy $N \geq 0$. Z nierówności Minkowskiego mamy

$$\left\| \sum_{n=1}^N f_n \right\|_p \leq \sum_{n=1}^N \|f_n\|_p \leq \sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p.$$

Do tego $\sup_N \left\| \sum_{n=1}^N f_n \right\|_p = \sup_N \int \left(\sum_{n=1}^N f_n \right)^p d\mu = \int \left(\sup_N \sum_{n=1}^N f_n \right)^p d\mu$, gdzie ostatnie przejście wynika z tego, że sumujemy dodatnie wartości. To kończy dowód, bo $\sup_N \sum_{n=1}^N f_n = \sum_{n=1}^\infty f_n$. $\square$

Lemat 18. Niech $(f_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{L}^p(\mu)$ dla $p \in [1, \infty)$ będzie ciągiem Cauchy'ego względem $\|\cdot\|_p$. Wówczas istnieją takie $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ oraz $n(1) < n(2) < \dots$, że $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n(k)}(x) = f(x)$ dla μ -pw x . Co więcej $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n(k)}$ w $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Dowód. Z definicji ciągu Cauchy'ego znajdujemy taki ciąg $n(1) < n(2) < \dots$, że dla $k \geq 1$ zachodzi $\|f_{n(k+1)} - f_{n(k)}\|_p \leq 2^{-k}$. Niech $n(0) = 0$ i $f_0 = 0$. Mamy $f_{n(k+1)} = \sum_{j=0}^k f_{n(j+1)} - f_{n(j)}$. Pokażemy, że szukaną funkcją jest $f = \sum_{j=0}^\infty f_{n(j+1)} - f_{n(j)}$. Mamy $\left\| \sum_{j=0}^\infty f_{n(j+1)} - f_{n(j)} \right\|_p \leq \sum_{j=0}^\infty \|f_{n(j+1)} - f_{n(j)}\|_p \leq \|f_{n(1)}\|_p + \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{2^j} < \infty$. Zatem $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ i $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ dla μ -pw x . Do tego $\|f - f_{n(k)}\|_p \leq \sum_{j=k}^\infty \|f_{n(j+1)} - f_{n(j)}\|_p \leq \sum_{j=k}^\infty \frac{1}{2^j} \rightarrow 0$. $\square$

Wniosek (Twierdzenie Riesz-Fischera). $\mathcal{L}^p(\mu)$ i $L^p(\mu)$ są przestrzeniami zupełnymi dla $p \in [1, \infty]$.

Dowód. Przypadek $p < \infty$ rozważyliśmy w poprzednim lemacie. Dla ciągu Cauchy'ego $(f_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{L}^\infty(\mu)$ niech $A_k = \{x \in X : |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\}$ i $B_{m,n} = \{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| > \|f_m - f_n\|_\infty\}$. Są to zbiory miary zero. Zbiór $E = \bigcup_{k=1}^\infty A_k \cup \bigcup_{m,n=1}^\infty B_{m,n}$ również jest miary zero. Na $X \setminus E$ zachodzi nierówność $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$, więc rozważany ciąg jest jednostajnie zbieżny. Niech f będzie granicą tego ciągu na $X \setminus E$, a na E niech równa się 0. Dla odpowiednio dużego N mamy $\|f_n\|_\infty \leq \|f_N\|_\infty + 1$ dla $n \geq N$. Zatem $|f(x)| \leq \|f_N\|_\infty + 1$ dla μ -pw x . Podobnie $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ dla μ -pw x i odpowiednio dużego n . Zatem $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$. $\square$

Wniosek. Jeżeli $(f_n)_{n=1}^\infty$ i g są elementami $\mathcal{L}^p(\mu)$ dla $p \in [1, \infty)$ oraz dla każdego n mamy $|f_n| \leq g$ μ -pw, to jeśli $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ dla μ -pw x , to $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

Twierdzenie 21 (Riesz). Ustalmy $p \in [1, \infty)$. Niech $f, (f_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{L}^p(\mu)$ będą takie, że $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ dla μ -pw x . Wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$.

Dowód. ($\implies$) Wystarczy zastosować odwrotną nierówność trójkąta $|\|f_n\|_p - \|f\|_p| \leq \|f_n - f\|_p$.

($\impliedby$) Mamy $|f_n - f|^p \leq 2^p (|f_n|^p + |f|^p)$. Zatem $2^p (|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p \geq 0$ i można zastosować lemat Fatou

$$\begin{aligned} \int 2^{p+1} |f|^p d\mu &= \int \liminf_{n \rightarrow \infty} (2^p (|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p) d\mu \leq \\ &\int 2^p |f|^p d\mu + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int 2^p |f_n|^p d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f|^p d\mu \leq \int 2^{p+1} |f|^p d\mu, \end{aligned}$$

gdzie ostatnie przejście korzysta ze zbieżności normy. Nierówność okazała się być równością, więc mamy $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f|^p d\mu = 0$, co daje tezę. $\square$

11. Miary regularne

Definicja 52. σ -algebrą zbiorów Baire'a nazywamy σ -algebrę

$$\mathcal{B}_a(X) = \sigma(\{f^{-1}(U) : U \subseteq \mathbb{R} \text{ otwarty}, f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ ciągła}\}),$$

która jest najmniejszą σ -algebrą względem której wszystkie rzeczywiste funkcje ciągłe na X są mierzalne.

Definicja 53. Mówimy, że miara μ na $(X, \mathcal{A})$ jest

- zewnętrźnie regularna, jeżeli dla $A \in \mathcal{A}$ jest $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U, U \text{ otwarte}, U \in \mathcal{A}\}$.
- regularna, jeżeli dla $A \in \mathcal{A}$ jest $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ zwarty}, K \in \mathcal{A}\}$.
- regularna względem zbiorów domkniętych, jeżeli dla $A \in \mathcal{A}$ jest $\mu(A) = \sup\{\mu(D) : D \subseteq A, D \text{ domknięte}, D \in \mathcal{A}\}$.

Miarę skończoną na $(X, \mathcal{A})$ nazywamy ciasną (tight), jeżeli X spełnia warunek z definicji miary regularnej.

Lemat 19. Niech X będzie przestrzenią metryczną, a μ skończoną miarą borelowską na X . Niech $\mathcal{R}$ będzie rodziną zbiorów, które spełniają warunek z definicji miary zewnętrznie regularnej i regularnej względem zbiorów domkniętych. $\mathcal{R}$ jest σ -algebrą.

Twierdzenie 22. Jeżeli X jest przestrzenią metryczną, to każda skończona miara borelowska na X jest regularna względem zbiorów domkniętych i zewnętrznie regularna.

Dowód. Wystarczy pokazać, że zbiory otwarte spełniają odpowiednie warunki, bo rodzina zbiorów spełniających rozważane warunki jest σ -algebrą. Dla $U \subseteq X$ otwartego spełniony jest warunek zewnętrznej regularności, bo miara jest monotoniczna. Rozważmy zbiory domknięte postaci $F_n = \{x \in X : \text{dist}(x, X \setminus U) \geq \frac{1}{n}\}$. Mamy $F_n \subseteq U$ oraz $F_n \subseteq F_{n+1}$ i $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = U$. Zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) = \mu(U)$, co świadczy o $\mu(U) \leq \sup\{\mu(F) : F \subseteq U, F \text{ domknięty}\}$. Druga nierówność wynika z monotoniczności miary. $\square$

Twierdzenie 23. Każda ciasna, skończona miara borelowska na przestrzeni metrycznej jest regularna.

Dowód. Niech K będzie takim zbiorem zwartym, że $\mu(X \setminus K) \leq \varepsilon$. Dla dowolnego F mamy $\mu(F) = \mu(F \cap K) + \mu(F \setminus K) \leq \mu(F \cap K) + \varepsilon$. Dla zbioru borelowskiego A mamy $\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq A, F \text{ domknięty}\} \leq \varepsilon + \sup\{\mu(F \cap K) : F \subseteq A, F \text{ domknięty}\}$. Zbiory postaci $F \cap K$ są zwarte, zatem przechodząc $\varepsilon \rightarrow 0$ dostajemy $\mu(A) \leq \sup\{\mu(D) : D \subseteq A, D \text{ zwarty}\}$. Druga nierówność wynika z monotoniczności miary. $\square$

Definicja 54. Przestrzenią polską nazywamy ośrodkową przestrzeń topologiczną, która jest metryzowalna w sposób zupełny.

Twierdzenie 24 (Ulam). Każda skończona miara borelowska na przestrzeni polskiej jest ciasna, więc regularna.

Dowód. Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ będzie ośrodkiem. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i $m \geq 1$. Istnieje n takie, że dla $K_m = \bigcup_{j=1}^m \overline{B}(x_j, \frac{1}{m})$ mamy $\mu(X \setminus K_m) < \frac{\varepsilon}{2^m}$. Niech $K = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$. Ten zbiór jest zwarty, bo jest domknięty i całkowicie ograniczony (dla każdego $\delta > 0$ można go pokryć skończoną liczbą kul o promieniu δ), co w przestrzeniach zupełnych implikuje zwartość. Do tego $\mu(X \setminus K) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(X \setminus K_i) \leq \varepsilon$. $\square$

Definicja 55. Miara borelowska μ na X jest miarą Radona, jeżeli dla każdego zwartego $K \subseteq X$ zachodzi $\mu(K) < \infty$.

Definicja 56. Przez $C_c(X)$ oznaczamy zbiór ciągłych funkcji $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ o zwartym nośniku.

Propozycja 27. Miara Radona na lokalnie zwartej przestrzeni metrycznej jest regularna.

Lemat 20. Jeżeli μ jest miarą Radona na lokalnie zwartej przestrzeni metrycznej X , to $J : C_c(X) \rightarrow \mathbb{R}$ zadane przez $J(f) = \int f d\mu$ jest dodatnim funkcjonałem liniowym na $C_c(X)$.

Twierdzenie 25 (Riesz, Markow, Kakutani). Niech X będzie ośrodkową, lokalnie zwartą przestrzenią metryczną. Jeżeli J jest dodatnim funkcjonałem liniowym na $C_c(X)$, to istnieje dokładnie jedna taka miara Radona μ na $(X, \mathcal{B}(X))$, że $J(f) = \int f d\mu$. Ponadto dla otwartego $U \subseteq X$ zachodzi $\mu(U) = \sup \{J(f) : f \in C_c(X), 0 \leq f \leq \chi_U\}$.

Twierdzenie 26. Jeżeli $(X, \mathcal{A}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą, $p \in [1, \infty)$, to zbiór klas równoważności funkcji prostych należących do $\mathcal{L}^1(\mu)$ jest gęsty w $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$.

Jeżeli X jest przestrzenią metryzowalną a μ zewnętrznie regularną miarą borelowską na X , to ograniczone funkcje lipschitzowsko ciągłe w $\mathcal{L}^p(\mu)$ są gęste w $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Jeżeli X jest metryzowalną, ośrodkową, lokalnie zwartą przestrzenią a μ miarą Radona, to funkcje lipschitzowskie w $C_c(X)$ są gęste w $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Wniosek. $C_c(\mathbb{R}^d)$ jest gęsty w $\mathcal{L}^p(\lambda)$ dla $p \in [1, \infty)$.

Dowód. λ jest miarą Radona. □

12. Absolutna ciągłość

2026-01-21

Definicja 57. Niech μ, ν będą miarami na $(X, \mathcal{A})$. Mówimy, że ν jest absolutnie ciągła względem μ (oznaczenie $\nu \ll \mu$), jeśli $\mu(A) = 0$ dla $A \in \mathcal{A}$ implikuje $\nu(A) = 0$.

ν jest singularna (ortogonalna) względem μ (co oznaczamy $\nu \perp \mu$), jeśli istnieje $N \in \mathcal{A}$ takie, że $\mu(N) = 0 = \nu(X \setminus N)$.

Przykład. Dla różnych $a, b \in X$ mamy $\delta_a \perp \delta_b$ (miara Diraca).

Dla $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$ i $\nu(A) = \int_A f d\mu$ mamy $\nu \ll \mu$.

Twierdzenie 27 (Lebesgue, Radon, Nikodym). 1. Jeżeli ν, μ są σ -skończone, to istnieje dokładnie jedna para (ν_a, ν_s) miar na $(X, \mathcal{A})$ takich, że $\nu = \nu_a + \nu_s$ i $\nu_a \ll \mu$, $\nu_s \perp \mu$.

2. Jeżeli ν, μ są σ -skończone, to istnieje taka funkcja mierzalna $g : X \rightarrow [0, \infty)$, że $\nu_a(A) = \int_A g d\mu$ dla każdego $A \in \mathcal{A}$. Do tego g jest wyznaczone jednoznacznie w $L^1(\mu)$.

Dowód. Zakładamy skończoność miar. Najpierw rozważymy przypadek $\nu \leq \mu$. Wtedy dla $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$ mamy $\int g d\nu \leq \int g d\mu$. Zatem $\mathcal{L}^2(\mu) \subseteq \mathcal{L}^1(\mu) \subseteq \mathcal{L}^1(\nu)$ i ma sens odwzorowanie $\Phi : \mathcal{L}^2(\mu) \ni f \rightarrow \int f d\nu \in \mathbb{R}$. Oznaczmy przez $\tilde{\Phi}$ odwzorowanie indukowane na $L^2(\mu)$. Stosując nierówność Cauchy'ego-Schwarza mamy

$$|\Phi(f)| \leq \int |f \cdot 1| d\nu \leq \left(\int |f|^2 d\nu \right)^{\frac{1}{2}} \nu(X)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(\mu)} \nu(X)^{\frac{1}{2}}.$$

Zatem $\tilde{\Phi}$ jest ciągłym funkcjonałem liniowym na $L^2(\mu)$, które jest przestrzenią Hilberta, więc z twierdzenia Riesz istnieje $g \in L^2(\mu)$ takie, że $\tilde{\Phi}(f) = \int fg d\mu$. W szczególności $\nu(A) = \int \chi_A d\nu = \tilde{\Phi}(\chi_A) = \int_A g d\mu$.

Dla ustalonego $\varepsilon > 0$ mamy ciąg nierówności $\mu(\{g \geq 1 + \varepsilon\}) \geq \nu(\{g \geq 1 + \varepsilon\}) = \int_{\{g \geq 1 + \varepsilon\}} g d\mu \geq (1 + \varepsilon) \mu(\{g \geq 1 + \varepsilon\})$. Wynika z niego, że $\mu(\{g \geq 1 + \varepsilon\}) = 0$, bo ν jest skończona. Mamy zatem $\mu(\{g > 1\}) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} \left\{g \geq 1 + \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$, czyli $0 \leq g \leq 1$ μ -pw.

Teraz rozważamy dowolne skończone μ, ν . Niech $\eta = \mu + \nu$. Wtedy $\nu \leq \eta$. Mamy więc funkcję mie-

rzalną $h : X \rightarrow [0, 1]$ taką, że $\int f d\nu = \int fh d\eta$ dla każdego $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$. Mamy $\int f d\nu = \int fh d\eta = \int fh d\nu + \int fg d\mu$, gdzie ostatnie przejście zachodzi dla funkcji prostych, więc z twierdzenia o zbieżności monotonicznej również dla mierzalnych. Zachodzi więc równość $\int f(1-h) d\nu = \int fh d\mu$. Niech $N = \{h = 1\}$. Dla $f = \chi_N$ mamy $0 = \int_N (1-h) d\nu = \int_N h d\mu = \mu(N)$. Zatem miara $\nu_s = \chi_N \nu$ spełnia $\nu_s(X \setminus N) = 0 = \mu(N)$ i mamy $\nu_s \perp \mu$.

Niech $\tilde{f} = \chi_{X \setminus N} (1-h)^{-1} f$ dla $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$. Mamy równość $\int_{X \setminus N} f d\nu = \int \tilde{f} (1-h) d\nu = \int_{X \setminus N} f \frac{h}{h-1} d\mu$. Dla $f = \chi_A$ zachodzi więc $\nu(A \cap (X \setminus N)) = \int_A \chi_{X \setminus N} \frac{h}{h-1} d\mu$. Możemy położyć $\nu_a = \chi_{X \setminus N} \frac{h}{h-1} \cdot \mu$, co da nam $\nu = \nu_a + \nu_s$ i $\nu_a \ll \mu$.

Dla miar σ -skończonych mamy ciąg $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ taki, że $\mu(E_n), \nu(E_n) < \infty$. Możemy założyć $E_n \subseteq E_{n+1}$. Stosujemy przypadek skończony na $\nu_n = \nu|_{E_n}$ i $\mu_n = \mu|_{E_n}$ i definiujemy $\nu_a(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_{n,a}(A \cap (E_n \setminus E_{n-1}))$, analogicznie ν_s .

Pozostało pokazać jedyność. Niech (ν_a, ν_s) i (ν'_a, ν'_s) spełniają pierwszy punkt. Wtedy $\rho = \nu_a - \nu'_a = \nu'_s - \nu_s$ spełnia $\rho \ll \mu$ (jako $\nu_a - \nu'_a$) oraz $\rho \perp \mu$, bo jeśli $\nu_s(N) = \nu'_s(N') = \mu(X \setminus N) = \mu(X \setminus N') = 0$, to $\rho(N \cap N') = 0 = \mu(X \setminus (N \cap N'))$. Z tego wynika $\rho = 0$.

Niech $g, \tilde{g}$ będą takie, że $\nu_a = \int g d\mu = \int \tilde{g} d\mu$. Wtedy $\int_{\{\tilde{g} > g\}} \tilde{g} d\mu = \nu_a(\{\tilde{g} > g\}) = \int_{\{\tilde{g} > g\}} g d\mu$, z czego wynika $\mu(\{\tilde{g} > g\}) = 0$. Analogicznie $\mu(\{g > \tilde{g}\}) = 0$. Zatem $\tilde{g} = g$ μ -pw. $\square$

Definicja 58. Jeżeli $\nu \ll \mu$, to $\nu_a = \nu$ i $\nu_s = 0$. Wtedy funkcję g otrzymaną z twierdzenia Radona-Nikodyma nazywamy pochodną Radona-Nikodyma ν względem μ i piszemy $g = \frac{d\nu}{d\mu}$.

Twierdzenie 28. Jeżeli μ jest σ -skończona a ν skończona, to $\nu \ll \mu$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla każdego $A \in \mathcal{A}$ zachodzi $\mu(A) < \delta \implies \nu(A) < \varepsilon$.

Dowód. ($\implies$) Wiemy, że istnieje g takie, że $\nu(A) = \int_A g d\mu$. Wiemy, że $\int_{\{g \geq n\}} g d\mu \rightarrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$. Zatem dla $\varepsilon > 0$ istnieje $M > 0$ takie, że $\int_{\{g \geq M\}} g d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$. Wtedy

$$\nu(A) = \int_{\{g \geq M\} \cap A} g d\mu + \int_{\{g < M\} \cap A} g d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + M\mu(A).$$

Przyjmując $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$ dostajemy $\nu(A) < \varepsilon$.

($\impliedby$) Oczywiście. $\square$