

ANALIZA MATEMATYCZNA 4

NOTATKI

„We Francji winorośl pnie się do góry w lewo, w Niemczech chmiel pnie się do góry w prawo, a w Polsce ziemniaki... nie są rośliną pnącą.”

MACIEJ MIKOŁAJCZAK
Kraków, 2026

Spis treści

1. Dodatek algebraiczny	2
2. Geometria potęg zewnętrznych	6
3. Formy różniczkowe	9
4. Krzywe i drogi	13
5. Całki krzywoliniowe	15
6. Formy zamknięte i dokładne	20

1. Dodatek algebraiczny

Definicja 1. Niech $V_1, \dots, V_p$ będą przestrzeniami wektorowymi nad $\mathbb{K}$. Iloczynem tensorowym $V_1, \dots, V_p$ nazywamy przestrzeń wektorową i odwzorowanie liniowe

$$(V_1 \otimes \dots \otimes V_p, \otimes_p : V_1 \times \dots \times V_p \rightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_p)$$

takie, że dla każdej przestrzeni wektorowej W i odwzorowania p -liniowego $\varphi : V_1 \times \dots \times V_p \rightarrow W$ istnieje jedyne odwzorowanie $L : V_1 \otimes \dots \otimes V_p \rightarrow W$, które jest liniowe i $\varphi = L \circ \otimes_p$.

Notacja. Piszemy $\otimes_p (v_1, \dots, v_p) = v_1 \otimes \dots \otimes v_p$ dla $v_i \in V_i$.

Uwaga. Z jednoznaczności L wynika, że $\text{Lin}(\text{Im } \otimes_p) = V_1 \otimes \dots \otimes V_p$.

Iloczyn tensorowy jest uogólnieniem mnożenia $\mathbb{K}^p \ni (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \mapsto \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_p \in \mathbb{K}$.

Twierdzenie 1. Iloczyn tensorowy istnieje i jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu.

Definicja 2. Iloczynem tensorowym odwzorowań liniowych $f_i : V_i \rightarrow W_i$ nazywamy odwzorowanie faktoryzujące L istniejące z własności uniwersalnej iloczynu tensorowego zastosowanej do diagramu

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \dots \times V_p & \xrightarrow{f_1 \times \dots \times f_p} & W_1 \times \dots \times W_p \\ \downarrow \otimes_p & \searrow \otimes_p \circ f_1 \times \dots \times f_p & \downarrow \otimes_p \\ V_1 \otimes \dots \otimes V_p & \xrightarrow{L} & W_1 \otimes \dots \otimes W_p \end{array}$$

Oznaczamy $f_1 \otimes \dots \otimes f_p := L$.

Uwaga. Gdy $\dim V_i = n_i$, to dla form p -liniowych $\varphi \in \mathcal{L}_p(V_1, \dots, V_p; \mathbb{K})$ otrzymujemy izomorfizm $\mathcal{L}_p(V_1, \dots, V_p; \mathbb{K}) \simeq (V_1 \otimes \dots \otimes V_p)^* \simeq V_1^* \otimes \dots \otimes V_p^*$, skąd $\dim V_1 \otimes \dots \otimes V_p = n_1 \cdot \dots \cdot n_p$. Dla baz $\{e_i^{(j)}\}_{i=1}^{n_j}$ przestrzeni V_j dostajemy bazę $V_1 \otimes \dots \otimes V_p$ w postaci

$$\{e_{i_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes e_{i_p}^{(p)} : i = 1, \dots, n_j, j = 1, \dots, p\}.$$

Uwaga. Jeśli V jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$, to $\mathbb{C} \otimes V$ jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$ i $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \otimes V$. Mamy włożenie $V \ni v \mapsto 1 \otimes v \in \mathbb{C} \otimes V$.

Definicja 3. Odwzorowanie p -liniowe $f : V^p \rightarrow W$ nazywamy antysymetrycznym (alternującym), gdy dla $(v_1, \dots, v_p) \in V^p$ i permutacji $\sigma \in S_p$ zachodzi $f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) = \text{sgn } \sigma f(v_1, \dots, v_p)$. Ogół takich odwzorowań oznaczamy $\mathcal{A}_p(V, W)$.

Propozycja 1. Następujące warunki są równoważne dla odwzorowania p -liniowego $f : V^p \rightarrow W$.

1. $f \in \mathcal{A}_p(V, W)$.
2. Dla $v_1, \dots, v_p \in V$ i $1 \leq i < j \leq p$ zachodzi $f(v_1, \dots, v_p) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_p)$.
3. Dla $v_1, \dots, v_p \in V$ i $1 \leq i < j \leq p$ jeśli $v_i = v_j$, to $f(v_1, \dots, v_p) = 0$.
4. Jeśli $v_1, \dots, v_p$ są liniowo zależne, to $f(v_1, \dots, v_p) = 0$.

Uwaga. Odwzorowanie p -liniowe $f : V^p \rightarrow W$ jest wyznaczane jednoznacznie poprzez wartości $f(e_{\lambda(1)}, \dots, e_{\lambda(p)})$, gdzie λ jest funkcją rosnącą a $\{e_i\}$ uporządkowaną bazą V .

Definicja 4. p -tą potęgą zewnętrzną przestrzeni wektorowej V nad $\mathbb{K}$ nazywamy przestrzeń wektorową $\bigwedge^p V$ nad tym samym ciałem wraz z odwzorowaniem $\bigwedge_p : V^p \rightarrow \bigwedge^p V$ takim, że dla każdej przestrzeni wektorowej W nad $\mathbb{K}$ i $\alpha \in \mathcal{A}_p(V, W)$ istnieje jedyne odwzorowanie liniowe

$L : \bigwedge^p V \rightarrow W$ takie, że $\alpha = L \circ \bigwedge_p$.

Notacja. Oznaczamy $\bigwedge_p (v_1, \dots, v_p) = v_1 \wedge \dots \wedge v_p$. Przyjmujemy $\bigwedge^0 V = V$, nie rozważamy $\bigwedge_0$.

Uwaga. Z jednoznaczności L wynika, że otrzymane z bazy V wektory $e_{\lambda(1)} \wedge \dots \wedge e_{\lambda(p)}$ rozpinają $\bigwedge^p V$.

Twierdzenie 2. Potęga zewnętrzna istnieje i jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu.

Definicja 5. Dla $p \geq 1$ przez $G_p(V)$ oznaczamy zbiór p -wektorów prostych $\bigwedge_p(V^p)$. Dla $p = 0$ piszemy $G_0(V) = \mathbb{K}$.

Uwaga. Dla $\lambda \in \mathbb{K}$ mamy $\lambda G_p(V) \subseteq G_p(V)$ oraz $\text{Lin } G_p(V) = \bigwedge^p V$.

Definicja 6. p -tą potęgą zewnętrzną odwzorowania liniowego $f : V \rightarrow W$ nazywamy odwzorowanie faktoryzujące L istniejące z własności uniwersalnej potęgi zewnętrznej zastosowanej do diagramu

$$\begin{array}{ccc} V^p & \xrightarrow{f \times \dots \times f} & W^p \\ \downarrow \bigwedge_p & & \downarrow \bigwedge_p \\ \bigwedge^p V & \xrightarrow{L} & \bigwedge^p W \end{array}$$

Oznaczamy $\bigwedge^p f := L$. Przyjmujemy $\bigwedge^0 f = \text{id}_{\mathbb{K}}$.

Uwaga. Dla $V \simeq \mathbb{K}^m$, $W \simeq \mathbb{K}^n$ i $p \in \mathbb{N}$ przez $\mathcal{A}_p(V, W)$ oznaczamy przestrzeń wektorową odwzorowań p -liniowych antysymetrycznych między V a W . Dla $p = 0$ przyjmujemy, że ta przestrzeń to W . Piszemy $\mathcal{A}_p(V) = \mathcal{A}_p(V, \mathbb{K})$. Jeśli $\bigwedge(p, m)$ jest rodzina ściśle rosnących funkcji $[p] \rightarrow [m]$, to $|\bigwedge(p, m)| = \binom{m}{p}$. Zatem $\dim \mathcal{A}_p(V, W) = \binom{m}{p}n$.

Propozycja 2. 1. Baza $e_1, \dots, e_m$ dla V daje bazę $e_\lambda = \{e_{\lambda(1)} \wedge \dots \wedge e_{\lambda(p)} : \lambda \in \bigwedge(p, m)\}$.
2. $v_1, \dots, v_p \in V$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $v_1 \wedge \dots \wedge v_p \neq 0$.
3. $\dim \bigwedge^p V = \binom{\dim V}{p}$.

Definicja 7. Niech $1 \leq p \leq m$. Definiujemy

$$\bigwedge_p : (\mathbb{K}^m)^p \ni (v^{(1)}, \dots, v^{(p)}) \rightarrow \left(\det [v_j^{(i)}]_{i,j=1,\dots,p} \right)_{\lambda \in \bigwedge(p, m)} \in \mathbb{K}^{\binom{m}{p}}.$$

Przestrzeń $\mathbb{K}^{\binom{m}{p}}$ z tym odwzorowaniem nazywamy modelem uniwersalnym $\bigwedge^p \mathbb{K}^m$, który jest poprawny na mocy poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 3. Niech V, W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi. Niech $f \in \mathcal{A}_p(V, W)$. Następujące warunki są równoważne.

1. W z odwzorowaniem f jest p -tą potęgą zewnętrzną V .
2. Dla każdej bazy $e_1, \dots, e_m$ przestrzeni V zbiór $\{f(e_{\lambda(1)}, \dots, e_{\lambda(p)}) : \lambda \in \bigwedge(p, m)\}$ jest bazą W .
3. Istnieje baza $e_1, \dots, e_m$ przestrzeni V taka, że zbiór $\{f(e_{\lambda(1)}, \dots, e_{\lambda(p)}) : \lambda \in \bigwedge(p, m)\}$ jest bazą W .

Dowód. (1 $\implies$ 2) Wynika z własności potęgi zewnętrznej.

(2 $\implies$ 3) Oczywiście.

(3 $\implies$ 1) Niech $\varphi : V^p \rightarrow A$ będzie p -liniowym, antysymetrycznym odwzorowaniem do pewnej przestrzeni wektorowej A . Definiujemy $L : W \rightarrow A$ na bazie wzorem $L(f(e_{\lambda(1)}, \dots, e_{\lambda(p)})) = \varphi(e_{\lambda(1)}, \dots, e_{\lambda(p)})$. Oczywiście $L \circ f = \varphi$ (na rosnącym ciągu elementów bazy z definicji, dowolne kombinacje z antysymetryczności f i φ). Do tego L jest jedyne, bo wartości na bazie muszą być takie, jakie są. $\square$

Uwaga. Niech A będzie endomorfizmem V , $\dim V = m$. Mamy $\bigwedge^m V \simeq \mathbb{K}$ (ma wymiar $\binom{m}{m} = 1$). Dla $m = 0$ odwzorowanie $\bigwedge^0 A : \bigwedge^0 V \rightarrow \bigwedge^0 V$ jest identycznością. Dla $m \geq 1$ funkcja $\bigwedge^m A : \bigwedge^m V \rightarrow \bigwedge^m V$ jest odwzorowaniem liniowym z ciała w ciało, więc jest postaci $\bigwedge^m A = \alpha \cdot \text{id}_{\bigwedge^m V}$, gdzie $\alpha \in \mathbb{K}$.

Zapisując $A = [a_{i,j}]_{i,j=1,\dots,m}$ w pewnej bazie $(e_i)_{i=1}^m$ dostajemy

$$\begin{aligned} \bigwedge^m A(e_1 \wedge \dots \wedge e_m) &= Ae_1 \wedge \dots \wedge Ae_m = \left(\sum_{j_1=1}^m a_{j_1,1} e_{j_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j_m=1}^m a_{j_m,m} e_{j_m} \right) = \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_m=1}^m (a_{j_1,1} \dots a_{j_m,m}) e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_m} = \left[\sum_{\sigma \in S_m} (a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(m),m}) \text{sgn } \sigma \right] e_1 \wedge \dots \wedge e_m = \\ &= \det A \cdot e_1 \wedge \dots \wedge e_m. \end{aligned}$$

Dostaliśmy $\alpha = \det A$. Gdybyśmy chcieli rozszerzyć ten wynik na $m = 0$ to mielibyśmy $\det A = \det 0 = 1$. Taka konwencja przyda nam się przy orientowaniu rozmaitości.

Propozycja 3. Dla $V \simeq \mathbb{K}^m$, $p \in \mathbb{N}$ i z konwencją $\bigwedge^p V = \{0\}$ dla $p > m$ mamy identyfikacje

$$\bigwedge^p V \simeq \left(\bigwedge^p V \right)^* \simeq \mathcal{A}_p(V) \simeq \bigwedge^p V^*.$$

Dowód. Dla $p = 0$ wszędzie dostajemy $\mathbb{K}$ lub $\mathbb{K}^*$. Dalej zakładamy $p > 0$.

Pierwsza identyfikacja wynika z istnienia bazy dualnej przestrzeni skończonej wymiarowej.

Dla $\alpha \in \mathcal{A}_p(V)$ istnieje funkcja $L_\alpha \in (\bigwedge^p V)^*$ wynikająca z własności uniwersalnej potęgi zewnętrznej. Odwrotnie, dla $\ell \in (\bigwedge^p V)^*$ mamy $\ell \circ \bigwedge_p \in \mathcal{A}_p(V)$. Te przekształcenia są dla siebie odwrotne.

Rozważmy odwzorowanie

$$\varphi : (V^*)^p \ni (f_1, \dots, f_p) \rightarrow \left(V^p \ni (v_1, \dots, v_p) \rightarrow \det [f_i(v_j)]_{i,j=1,\dots,p} \right) \in \mathcal{A}_p(V).$$

Z własności uniwersalnej potęgi zewnętrznej możemy je podnieść do $L : \bigwedge^p V^* \rightarrow \mathcal{A}_p(V)$. Bazą $\bigwedge^p V^*$ jest $(e_\lambda^*)_{\lambda \in \Lambda(p,m)}$. Mamy $L(e_\lambda^*) = \varphi(e_{\lambda(1)}^*, \dots, e_{\lambda(p)}^*)$. Ten funkcjonal zeruje się na e_μ dla każdego $\mu \neq \lambda$. Zatem funkcjonały tej postaci tworzą bazę $\mathcal{A}_p(V)$. Z tego wynika izomorficzność L . $\square$

Definicja 8. Rozważamy przestrzeń $\mathbb{R}^m$ dla $m \geq 3$. Ustalmy $v_1, \dots, v_{m-1} \in \mathbb{R}^m$. Wówczas odwzorowanie $\rho_{v_1, \dots, v_{m-1}} : \mathbb{R}^m \ni v_m \rightarrow \det[v_1, \dots, v_{m-1}, v_m] \in \mathbb{R}$ jest liniowe. Zatem istnieje (dokładnie jeden) wektor v taki, że $\rho_{v_1, \dots, v_{m-1}}(w) = \langle w, v \rangle$. Oznaczamy $v_1 \times \dots \times v_{m-1} := v$ i nazywamy ten wektor iloczynem wektorowym wektorów $v_1, \dots, v_{m-1}$.

Przykład. Weźmy $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ nie współliniowe. Mamy $(v^1, v^2, v^3) = v = v_1 \times v_2$. Skoro $v^i = \langle v, e_i \rangle =$

$$\langle e_i, v \rangle = \det[v_1, v_2, e_i], \text{ to mamy } v^1 = \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} & 1 \\ v_{1,2} & v_{2,2} & 0 \\ v_{1,3} & v_{2,3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1,2} & v_{2,2} \\ v_{1,3} & v_{2,3} \end{pmatrix} = A^1 \text{ (minor macierzy bez}$$

pierwszego wiersza i ostatniej kolumny). Analogicznie $v^2 = -A^2$ i $v^3 = A^3$. Wzór Laplace'a daje $\det[v_1, v_2, v] = v^1 A^1 - v^2 A^2 + v^3 A^3 = \|v\|^2$. Mamy $\langle v_i, v \rangle = \det[v_1, v_2, v_i] = 0$. Zatem $v_1 \times v_2$ jest prostopadły do $\text{Lin}\{v_1, v_2\}$ oraz $\|v\|^2 = \det[v_1, v_1, v] = \|v_1\| \|v_2\| \|v\| \sin \angle(v_1, v_2, v)$, z czego wynika $\|v_1 \times v_2\| = \|v_1\| \|v_2\| \sin \angle(v_1, v_2)$.

Propozycja 4. $\mathbb{R}^m$ wraz z odwzorowaniem $(\mathbb{R}^m)^{m-1} \ni (v_1, \dots, v_{m-1}) \rightarrow v_1 \times \dots \times v_{m-1} \in \mathbb{R}^m$ jest modelem $(m-1)$ -szej potęgi zewnętrznej.

Dowód. Wystarczy pokazać, że odwzorowanie $\Psi : \bigwedge^{m-1} \mathbb{R}^m \ni v_1 \wedge \dots \wedge v_{m-1} \rightarrow v_1 \times \dots \times v_{m-1} \in \mathbb{R}^m$ jest izomorfizmem. Mamy $\det[e_1, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_m, v] = (-1)^{m-i} v_i$ ($\widehat{e}_i$ oznacza brak e_i w ciągu). Zatem $e_1 \times \dots \times \widehat{e}_i \times \dots \times e_m = (-1)^{m-i} e_i$, czyli $\Psi(e_1 \wedge \dots \wedge \widehat{e}_i \wedge \dots \wedge e_m) = (-1)^{m-i} e_i$ i Ψ przerzuca bazę na bazę. $\square$

Przykład. Niech $T \neq \emptyset$, $V = \mathbb{K}^T$, $p \geq 1$ i określmy

$$\bigwedge_p : V^p \ni (f_1, \dots, f_p) \rightarrow \left(T^p \ni (\tau_1, \dots, \tau_p) \rightarrow \det[f_i(\tau_j)]_{i,j=1}^p \in \mathbb{K} \right) \in \mathbb{K}^{(T^p)}.$$

Jest to model p -tej potęgi zewnętrznej.

Definicja 9. Niech $p, q \in \mathbb{N}$. Mnożeniem zewnętrznym p -wektorów z q -wektorami nazywamy odwzorowanie

$$\wedge : \bigwedge^p V \times \bigwedge^q V \ni (\xi, \eta) \rightarrow \xi \wedge \eta \in \bigwedge^{p+q} V$$

zadane na wektorach prostych wzorem $(v_1 \wedge \dots \wedge v_p) \wedge (v_{p+1} \wedge \dots \wedge v_{p+q}) = v_1 \wedge \dots \wedge v_{p+q}$. Istnienie takiego odwzorowania wynika z poniższej uwagi.

Uwaga. Dla $p = q = 0$ mamy $\wedge : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \ni (x, y) \rightarrow xy \in \mathbb{K}$ (nie jest antysymetryczne).

Dla $p = 0, q > 0$ lub na odwrót mamy skalowanie $\wedge : \mathbb{K} \times \bigwedge^q V \ni (\lambda, \eta) \rightarrow \lambda \eta \in \bigwedge^q V$.

Dla $p, q \geq 1$ istnieje dokładnie jedno odwzorowanie spełniające ten warunek. Istotnie, $f_{v_1, \dots, v_p} : V^q \ni (v_{p+1}, \dots, v_{p+q}) \rightarrow v_1 \wedge \dots \wedge v_{p+q} \in \bigwedge^{p+q} V$ jest q -liniowe i antysymetryczne, więc istnieje jednoznacznie wyznaczony łącznik $F_{v_1, \dots, v_p} : \bigwedge^q V \rightarrow \bigwedge^{p+q} V$ spełniający żadaną równość. Możemy rozważyć $g : V^p \ni (v_1, \dots, v_p) \rightarrow F_{v_1, \dots, v_p} \in \text{Hom}(\bigwedge^q V, \bigwedge^{p+q} V)$, które jest p -liniowe i antysymetryczne. Zatem je również można podnieść do $G : \bigwedge^p V \rightarrow \text{Hom}(\bigwedge^q V, \bigwedge^{p+q} V)$. Możemy więc zdefiniować $\wedge : \bigwedge^p V \times \bigwedge^q V \ni (\xi, \eta) \rightarrow G(\xi)(\eta) \in \bigwedge^{p+q} V$, którego jedyności wynika z jedyności na wektorach prostych.

Propozycja 5. Dla $\xi \in \bigwedge^p V, \eta \in \bigwedge^q V$ zachodzi $\xi \wedge \eta = (-1)^{p+q} \eta \wedge \xi$.

Dowód. Na wektorach prostych oczywiste – dokonujemy odpowiedniej liczby transpozycji wektorów. Z dwuliniowości przenosi się to na dowolne argumenty. $\square$

Definicja 10. Rozważmy zbiór $\bigwedge V = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigwedge^p V$. Dla $\bar{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \dots) \in \bigwedge V$ i $\bar{\eta} \in \bigwedge V$ określamy $\bar{\xi} \wedge \bar{\eta} = (\xi_0 \wedge \eta_0, \xi_0 \wedge \eta_1 + \xi_1 \wedge \eta_0, \dots) \in \bigwedge V$. Zbiór $\bigwedge V$ wraz z naturalnym dodawaniem oraz właśnie zdefiniowanym mnożeniem nazywamy algebrą zewnętrzną lub algebrą Grassmanna przestrzeni V .

Uwaga. W związku z identyfikacją $\mathcal{A}_p(V) = \bigwedge^p V^*$ w przypadku skończonego wymiaru dostajemy mnożenie zewnętrzne zdefiniowane na formach antysymetrycznych. Dla $p, q \geq 1$ oraz $f \in \mathcal{A}_p(V), g \in \mathcal{A}_q(V)$ mamy

$$(f \wedge g)(v_1, \dots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \text{sgn } \sigma f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) g(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}).$$

Definicja 11. Niech $V \simeq \mathbb{K}^m, p \in \mathbb{N}, \xi \in \bigwedge^p V$. Określamy podprzestrzeń p -wektora ξ jako $\ker(V \ni v \rightarrow v \wedge \xi \in \bigwedge^{1+p} V) =: T_\xi$.

Uwaga. Jeśli $p \geq m$, to $T_\xi = V$. Jeśli $p = 0$, to $T_\xi = \{0\}$ dla $\xi \neq 0$, natomiast $T_0 = V$.

Twierdzenie 4. Dla $\xi \in \bigwedge^p V \setminus \{0\}$ i $1 \leq p \leq m$ zachodzi

1. $\dim T_\xi \leq p$.
2. $\dim T_\xi = p \iff \xi \in G_p(V)$.
3. $\xi = v_1 \wedge \dots \wedge v_p \in G_p(V) \implies T_\xi = \text{Lin}\{v_1, \dots, v_p\}$.

Dowód. (1) Dla $\dim T_\xi = 0$ oczywiste. Dla $k = \dim T_\xi \geq 1$ mamy bazę $e_1, \dots, e_k$ dla T_ξ , którą rozszerzamy do bazy $e_1, \dots, e_n$ dla V , co daje bazę $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \bigwedge(p,m)}$ dla $\bigwedge^p V$. Zatem $\xi = \sum_{\lambda \in \bigwedge(p,m)} \xi_\lambda e_\lambda$.

Skoro dla $i = 1, \dots, k$ jest $\sum_{\lambda \in \bigwedge(p,m)} \xi_\lambda e_\lambda \wedge e_i = \xi \wedge e_i = 0$ oraz $e_\lambda \wedge e_i = 0 \iff i \in \text{Im } \lambda$, to z liniowej niezależności wynika, że $\xi_\lambda = 0$ dla każdego $\lambda \in \bigwedge(p,m)$ takiego, że $i \notin \text{Im } \lambda$ dla któregoś i . Jeśli $p < k$, to λ nie może przyjmować k różnych wartości i $\xi = 0$, co nie jest prawdą.

(2) Kontynuując argument z poprzedniego dowodu, jeśli $\xi_\lambda \neq 0$, to e_λ ma postać $e_1 \wedge \dots \wedge e_k \wedge e_\mu$, dla pewnego $\mu \in \bigwedge(p-k, m)$ takiego, że $\text{Im } \mu \cap \{1, \dots, k\} = \emptyset$. Ostatecznie $\xi = (e_1 \wedge \dots \wedge e_k) \wedge \eta$ dla pewnego $\eta \in \bigwedge^{p-k} V$. Zakładając $k = p$ mamy $\eta \in \bigwedge^0 V = \mathbb{K}$, skąd $\xi = \eta \cdot e_1 \wedge \dots \wedge e_k \in G_p(V)$.

Odwrotnie, gdy $\xi = v_1 \wedge \dots \wedge v_p \in G_p(V)$, to mamy $\text{Lin}\{v_1, \dots, v_p\} \subseteq T_\xi$. Z $\xi \neq 0$ mamy liniową niezależność $v_1, \dots, v_p$, więc $\dim T_\xi \geq p$. Zatem $\dim T_\xi = p$ a z równości wymiarów dostajemy (3). $\square$

Propozycja 6. Dla $\xi, \eta \in G_p(V) \setminus \{0\}$, $1 \leq p \leq m$ mamy $T_\xi = T_\eta \iff \exists a \in \mathbb{K}^* \xi = a \cdot \eta$.

Dowód. ($\implies$) Niech $\xi = v_1 \wedge \dots \wedge v_p$ i $\eta = w_1 \wedge \dots \wedge w_p$. Układy $v_1, \dots, v_p$ oraz $w_1, \dots, w_p$ są liniowo niezależne. Z założenia są one bazami przestrzeni $\text{Lin}\{v_1, \dots, v_p\} = \text{Lin}\{w_1, \dots, w_p\}$. Niech A będzie macierzą przejścia z $v_1, \dots, v_p$ do $w_1, \dots, w_p$. Mamy

$$\begin{aligned} \xi &= v_1 \wedge \dots \wedge v_p = \left(\sum_{i=1}^p a_{i,1} w_i \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i=1}^p a_{i,p} w_i \right) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn } \sigma \cdot a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(p),p} \cdot w_1 \wedge \dots \wedge w_p = \det A \cdot w_1 \wedge \dots \wedge w_p = \det A \cdot \eta. \end{aligned}$$

($\impliedby$) Oczywiście. $\square$

Uwaga. Dla $1 \leq p \leq m$ otrzymujemy w wyniku tych rozważań identyfikację

$$\mathbb{P}\left(\bigwedge^p V\right) \supset \{\mathbb{K}\xi : \xi \in G_p(V) \setminus \{0\}\} \ni \mathbb{K}\xi \rightarrow T_\xi \in \{T \leq V : \dim T = p\} = \tilde{G}_p(V),$$

gdzie $\tilde{G}_p(V)$ to p -ty grassmannian.

2. Geometria potęg zewnętrznych

2026-03-09

Uwaga. Docelowo będziemy rozważać całki rzeczywiste, więc ograniczamy się do $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i będziemy rozważać rzeczywisty iloczyn skalarny.

Uwaga. Przypomnijmy, że dla m -wymiarowej przestrzeni unitarnej V nad $\mathbb{R}$ i dwuliniowej symetrycznej formy $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ istnieje baza ortonormalna $\{e_i\}_{i=1}^m$ dla V taka, że $B(e_i, e_j) = 0$ dla $i \neq j$.

Definicja 12. Odwzorowanie $\beta : V \ni v \rightarrow \langle v, \cdot \rangle \in V^*$ nazywamy polaryzacją wyjściowego iloczynu skalarnego $\langle \cdot, \cdot \rangle$ w V . Skoro $\dim V = \dim V^*$ i $\ker \beta = \{0\}$, to β jest izomorfizmem.

Definicja 13. Iloczyn skalarny w przestrzeni dualnej V^* skojarzony z iloczynem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ z V definiujemy jako $V^* \times V^* \ni (\varphi, \psi) \rightarrow \langle \beta^{-1}(\varphi), \beta^{-1}(\psi) \rangle \in \mathbb{R}$. Nazywamy go indukowanym iloczynem skalarnym.

Uwaga. Dla bazy ortonormalnej $\{e_i\}_{i=1}^m$ dla V mamy $\beta(e_i)(e_j) = \delta_{ij}$, skąd $\beta(e_i) = e_i^*$ (baza dualna), co jest bazą ortonormalną względem indukowanego iloczynu skalarnego.

Uwaga. W V^* mamy dwie normy dla $f \in V^*$. Jest norma operatorowa $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$ oraz norma pochodząca z iloczynu skalarnego $|f| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. Okazuje się, że $|f| = \|f\|$, bo jeśli $f = \langle v, \cdot \rangle$, to $\|f\| = \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{\langle f, f \rangle} = |f|$.

Definicja 14. Niech $V \simeq \mathbb{R}^m$ będzie przestrzenią unitarną z polaryzacją $\beta : V \rightarrow V^*$. Dla $1 \leq p \leq m$ rozważamy odwzorowanie liniowe $\bigwedge^p \beta : \bigwedge^p V \rightarrow \bigwedge^p V^* \simeq (\bigwedge^p V)^*$. Możemy określić odwzorowanie

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \bigwedge^p V \times \bigwedge^p V \ni (\xi, \eta) \rightarrow \bigwedge^p \beta(\xi)(\eta) \in \mathbb{R}.$$

Nazywamy je iloczynem skalarnym indukowanym na $\bigwedge^p V$.

Propozycja 7. Niech $V \simeq \mathbb{R}^m$ będzie przestrzenią unitarną. Iloczyn skalarny indukowany na $\bigwedge^p V$ faktycznie jest iloczynem skalarnym. Do tego jeśli $\{e_i\}_{i=1}^m \subseteq V$ jest bazą ortonormalną, to wynikająca z niej baza $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \bigwedge(p,m)} \subseteq \bigwedge^p V$ jest bazą ortonormalną względem indukowanego iloczynu skalarnego. W szczególności zachodzi $\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{\lambda \in \bigwedge(p,m)} \xi_\lambda \eta_\lambda$ dla $\xi, \eta \in \bigwedge^p V$.

Dowód. Dla p -wektorów prostych $\xi = v_1 \wedge \dots \wedge v_p$, $\eta = w_1 \wedge \dots \wedge w_p$ mamy

$$\bigwedge^p \beta(\xi)(\eta) = (\beta(v_1) \wedge \dots \wedge \beta(v_p))(w_1 \wedge \dots \wedge w_p) = \det[\beta(v_i)(w_j)]_{i,j=1}^p = \det[\langle v_i, w_j \rangle]_{i,j=1}^p.$$

Z tej postaci od razu widać dwuliniowość oraz symetrię. Do tego ustalwszy $\lambda, \mu \in \bigwedge(p,m)$ dostajemy $\langle e_\lambda, e_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$. Z tego wynika, że dla $\xi, \eta \in \bigwedge^p V$ zapisanych jako $\xi = \sum_{\lambda \in \bigwedge(p,m)} \xi_\lambda e_\lambda$ oraz $\eta = \sum_{\lambda \in \bigwedge(p,m)} \eta_\lambda e_\lambda$ mamy $\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{\lambda \in \bigwedge(p,m)} \xi_\lambda \eta_\lambda \in \mathbb{R}$. To daje nam dodatnią określoność. $\square$

Uwaga. $\bigwedge^p \beta$ jest polaryzacją indukowanego iloczynu skalarnego.

Dla $v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_p \in V$ mamy $\langle v_1 \wedge \dots \wedge v_p, w_1 \wedge \dots \wedge w_p \rangle = \det[\langle v_i, w_j \rangle]_{i,j=1}^p$.

Z uwagi na kanoniczne identyfikacje na $\bigwedge^p V^*$ można wprowadzić iloczyn skalarny na dwa równoważne sposoby $V \rightarrow V^* \rightarrow \bigwedge^p V^*$ oraz $V \rightarrow \bigwedge^p V \rightarrow (\bigwedge^p V)^*$.

Twierdzenie 5 (Nierówność Hadamarda). Niech $V \simeq \mathbb{R}^m$ będzie przestrzenią unitarną, $1 \leq p, q \leq m$ będą takie, że $1 \leq p+q \leq m$. Niech $\xi \in \bigwedge^p V$, $\eta \in \bigwedge^q V$ i niech co najmniej jeden z nich będzie prosty. W takiej sytuacji $|\xi \wedge \eta| \leq |\xi| |\eta|$.

Dowód. Bazę ortonormalną $\{e_1, \dots, e_p\} \subseteq T_\xi$ poszerzamy do bazy ortonormalnej $\{e_i\}_{i=1}^m \subseteq V$. Zakładając, że ξ jest p -wektorem prostym dostajemy, że $\xi = a e_1 \wedge \dots \wedge e_p$ dla $a \in \mathbb{R}$ oraz $\eta = \sum_{\lambda \in \bigwedge(q,m)} \eta_\lambda e_\lambda$. Liczymy $\xi \wedge \eta = \sum_{\lambda \in \bigwedge(q,m)} a \eta_\lambda e_1 \wedge \dots \wedge e_p \wedge e_\lambda$.

Składnik sumy jest niezerowy dokładnie, gdy $\text{Im } \lambda \cap \{1, \dots, p\} = \emptyset$, a więc gdy $e_1 \wedge \dots \wedge e_p \wedge e_\lambda = e_\mu$ dla jedyne go $\mu \in \bigwedge(p+q, m)$ takiego, że $\text{Im } \mu = \{1, \dots, p\} \cup \text{Im } \lambda$. Na podstawie wzoru na $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dostajemy

$$|\xi \wedge \eta|^2 = \sum_{\substack{\lambda \in \bigwedge(q,m) \\ \text{Im } \lambda \cap \{1, \dots, p\} = \emptyset}} a^2 \eta_\lambda^2 \leq \sum_{\lambda \in \bigwedge(q,m)} a^2 \eta_\lambda^2 = |\xi|^2 |\eta|^2.$$

$\square$

Uwaga. Założenie, że jeden z wektorów jest prosty jest potrzebne, np. w $\mathbb{R}^6$ dla $\xi = \eta = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6$ mamy $|\xi| = \sqrt{3}$ oraz $|\xi \wedge \eta| = \sqrt{12} > 3$.

Twierdzenie 6. Niech $V \simeq \mathbb{R}^m$ będzie przestrzenią unitarną, $v_1, \dots, v_p \in V$ dla $1 \leq p \leq m$. Mamy $|v_1 \wedge \dots \wedge v_p| \leq \|v_1\| \dots \|v_p\|$. W szczególności dla $p = m$ mamy $|\det[v_1, \dots, v_m]| \leq \|v_1\| \dots \|v_m\|$.

Dowód. Jeśli $v_1, \dots, v_p$ są liniowo zależne, to teza zachodzi. Dalej zakładamy, że są liniowo niezależne. Można je przekształcić do układu ortogonalnego: $e_1 = v_1$ i $e_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle v_i, e_j \rangle}{\langle e_j, e_j \rangle} e_j$ dla $i \geq 2$. Oznaczmy $w_i = v_i - e_i$ dla $i \geq 1$. Mamy $v_1 \wedge \dots \wedge v_p = e_1 \wedge \dots \wedge e_p$, bo z antysymetryczności mamy $x \wedge (y + ax) = x \wedge y$.

Z twierdzenia Pitagorasa zachodzi $\|v_i\|^2 = \|e_i\|^2 + \|w_i\|^2 \geq \|e_i\|^2$. Mamy więc

$$|v_1 \wedge \dots \wedge v_p| = |e_1 \wedge \dots \wedge e_p| = \sqrt{\left| \det [\langle e_i, e_j \rangle]_{i,j=1}^p \right|} = \|e_1\| \dots \|e_p\| \leq \|v_1\| \dots \|v_p\|.$$

Równość zachodzi, gdy $\|w_i\| = 0$ dla każdego i , więc gdy $v_1, \dots, v_p$ są ortogonalne.

Dla $p = m$ mamy $v_1 \wedge \dots \wedge v_m = \det A \cdot u_1 \wedge \dots \wedge u_m$, gdzie $\{u_1, \dots, u_m\}$ jest bazą kanoniczną a A jest zapisem $v_1, \dots, v_m$ w tej bazie. Stąd mamy drugi punkt. $\square$

Definicja 15. Niech $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ z $1 \leq n \leq m$. Niech L_λ (dla $\lambda \in \Lambda(n, m)$) będzie minorem $n \times n$ podmacierzy L złożonej z kolumn wyznaczonych przez λ . Liczbę $|L| = \sqrt{\sum_{\lambda \in \Lambda(n, m)} L_\lambda^2}$ nazywamy uogólnionym wyznacznikiem L .

Propozycja 8. Niech $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ z $1 \leq n \leq m$. Zachodzi $|L| = \|\bigwedge^n L\|$ oraz $|L|^2 = \det L^T L$.

Dowód. Niech $\{e_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ i $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathbb{R}^m$ będą bazami ortonormalnymi. Niech $L = [a_{ji}]_{\substack{j=1, \dots, m \\ i=1, \dots, n}}$ w tych bazach. Wtedy

$$\begin{aligned} \left\| \bigwedge^n L \right\| &= \\ \left| \bigwedge^n L(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) \right| &= |L(e_1) \wedge \dots \wedge L(e_n)| = \left| \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^m a_{j_1, 1} \dots a_{j_n, n} \tilde{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \tilde{e}_{j_n} \right| = \\ \left| \sum_{\lambda \in \Lambda(n, m), \sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma \cdot a_{\lambda(\sigma(1)), 1} \dots a_{\lambda(\sigma(n)), n} \cdot \tilde{e}_\lambda \right| &= \left| \sum_{\lambda \in \Lambda(n, m)} L_\lambda \tilde{e}_\lambda \right| = \sqrt{\sum_{\lambda \in \Lambda(n, m)} L_\lambda^2}. \end{aligned}$$

Do tego

$$\left\| \bigwedge^n L \right\|^2 = |L(e_1) \wedge \dots \wedge L(e_n)|^2 = \langle L(e_1) \wedge \dots \wedge L(e_n), L(e_1) \wedge \dots \wedge L(e_n) \rangle = \det L^T L.$$

$\square$

Uwaga. Okaże się, że $|L|$ jest współczynnikiem określającym przekształcenie n -wymiarowej miary Lebesgue'a zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^n$ do n -wymiarowej miary Hausdorffa obrazu $L(A) \subseteq \mathbb{R}^m$. To znaczy, że $\mathcal{H}^n(L(A)) = |L| \mathcal{L}^n(A)$.

Twierdzenie 7. Niech $V \simeq \mathbb{R}^n$, $W \simeq \mathbb{R}^m$ będą unitarne. Niech $L, T : V \rightarrow W$ będą liniowe i takie, że dla każdego $v \in V$ mamy $\|L(v)\| \leq \|T(v)\|$. W takiej sytuacji $\|\bigwedge^n L\| \leq \|\bigwedge^n T\|$.

Dowód. Rozważmy $B : V \times V \ni (u, v) \rightarrow \langle T(u), T(v) \rangle \in \mathbb{R}$. Jest to odwzorowanie dwuliniowe symetryczne, więc istnieje baza ortonormalna $\{e_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ taka, że $B(e_i, e_j) = 0$ dla $i \neq j$. Wtedy $\{T(e_i)\}_{i=1}^n$ jest układem ortogonalny. Mamy

$$\begin{aligned} \left\| \bigwedge^n L \right\| &= \left| \bigwedge^n L(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) \right| = |L(e_1) \wedge \dots \wedge L(e_n)| \leq \|L(e_1)\| \dots \|L(e_n)\| \leq \\ &\|T(e_1)\| \dots \|T(e_n)\| = |T(e_1) \wedge \dots \wedge T(e_n)| = \left\| \bigwedge^n T \right\|. \end{aligned}$$

$\square$

3. Formy różniczkowe

2026-03-12

Definicja 16. Niech $U \in \text{top } \mathbb{R}^n \setminus \{\emptyset\}$, $0 \leq k \leq n$. Formą różniczkową stopnia (rzędu) k (lub k -formą) nazywamy odwzorowanie $\omega : U \rightarrow \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^n) \left(\simeq \bigwedge^k (\mathbb{R}^n)^* \simeq \left(\bigwedge^k \mathbb{R}^n \right)^* \right)$. Bazą przeciwdziedziny są iloczyny zewnętrzne bazy dualnej e_i^* do bazy kanonicznej e_i przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Wprowadzamy oznaczenie $dx_i = e_i^* : \mathbb{R}^n \ni x \rightarrow x_i \in \mathbb{R}$, dla którego ω ma postać kanoniczną $\omega(x) = \sum_{\lambda \in \bigwedge(k,n)} \omega_\lambda(x) dx_\lambda$, gdzie $\omega_\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ to funkcja a $dx_\lambda = dx_{\lambda(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\lambda(k)}$ to iloczyn zewnętrzny rzutowań $dx_{\lambda(j)}$, czyli

$$dx_\lambda : (\mathbb{R}^n)^k \ni x = (x^{(1)}, \dots, x^{(k)}) \rightarrow \det \left[x_{\lambda(j)}^{(i)} \right]_{i,j=1}^k \in \mathbb{R}.$$

Często dla uproszczenia zapisu będziemy pisać dx_i i dx_λ mając na myśli funkcje stałe postaci $U \ni a \rightarrow dx_\lambda \in \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^n)$. Wtedy możemy na przykład zapisać $\omega = \sum_{\lambda \in \bigwedge(k,n)} \omega_\lambda dx_\lambda$.

Oznaczamy ogół k -form na U symbolem $\Omega_k(U)$. Jest to przestrzeń wektorowa. $\mathcal{A}_k(\mathbb{R}^n)$ jest przestrzenią Banacha, więc można mówić o klasie $\mathcal{C}^p$ formy ω . Ogół k -form klasy $\mathcal{C}^p$ na U oznaczamy $\Omega_k^{(p)}(U)$.

Uwaga. Dla $k = 0$ mamy $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$, więc 0-forma to funkcja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Dla $k = n$ mamy $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}^n) = 1$ i jedynym elementem bazy jest $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Zatem każda n -forma ma postać $\omega = f \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, gdzie $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ to 0-forma.

Dla $k > n$ mamy $\mathcal{A}_k(\mathbb{R}^n) = \{0\}$, co nie daje nam nic ciekawego

Przykład. Rozważmy funkcję różniczkowalną $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Jej funkcja pochodna to $f' = df : U \ni x \rightarrow dx f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \mathcal{A}_1(\mathbb{R}^n)$. Skoro $dx f \cdot h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i$, to $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. Zatem $df \in \Omega_1(U)$.

Notacja. Dla $\omega \in \Omega_k(U)$ i $x \in U$ piszemy $\omega(x) \in \mathcal{A}_k(U)$ i dalej dla $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ liczymy $\omega(x; v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}$.

Propozycja 9. Niech $\omega = \sum_{\lambda \in \bigwedge(k,n)} \omega_\lambda dx_\lambda$ będzie k -formą. ω jest klasy $\mathcal{C}^p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\omega_\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy $\mathcal{C}^p$ dla każdego λ .

Dowód. ($\implies$) Mamy $\omega(x; e_{\lambda(1)}, \dots, e_{\lambda(k)}) = \sum_{\mu \in \bigwedge(k,n)} \omega_\mu(x) \det [e_{\lambda(i), \mu(j)}]_{i,j=1}^k = \omega_\lambda(x)$. Zatem wprowadzając odwzorowanie liniowe $L_\lambda : \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^n) \ni \alpha \rightarrow \alpha(e_{\lambda(1)}, \dots, e_{\lambda(k)}) \in \mathbb{R}$ dostajemy $\omega_\lambda = L_\lambda \circ \omega$, co daje tezę.

($\impliedby$) Odwzorowanie $\mathbb{R} \times \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^n) \ni (t, \alpha) \rightarrow t\alpha \in \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^n)$ jest dwuliniowe, skąd $\omega_\lambda dx_\lambda$ jest klasy $\mathcal{C}^p$, gdy ω_λ jest. $\square$

Definicja 17. Dla $\alpha \in \Omega_p(U)$, $\beta \in \Omega_q(U)$ przy $p, q \in \mathbb{N}$ określamy $\alpha \wedge \beta \in \Omega_{p+q}(U)$ poprzez $(\alpha \wedge \beta)(x) = \alpha(x) \wedge \beta(x) \in \mathcal{A}_{p+q}(\mathbb{R}^n)$.

Propozycja 10. Niech $\alpha \in \Omega_p(U)$, $\beta \in \Omega_q(U)$ i $\gamma \in \Omega_k(U)$.

1. Jeśli α, β są klasy $\mathcal{C}^p$, to $\alpha \wedge \beta$ też.
2. $\beta \wedge \alpha = (-1)^{pq} \alpha \wedge \beta$. W szczególności 2-formy komutują z innymi.
3. $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$.
4. Jeśli $\alpha_j \in \Omega_1(U)$ dla $j = 1, \dots, n$ (gdzie n to wymiar przestrzeni), to

$$(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n)(x; v_1, \dots, v_n) = \det [\alpha_i(x; v_j)]_{i,j=1}^n.$$

5. Jeśli $\alpha, \beta \in \Omega_0(U)$, to $\alpha \wedge \beta = \alpha \cdot \beta$ i stosujemy ten drugi zapis (stosujemy go też, gdy tylko

jedno z α, β jest 0-formą).

6. Dostajemy algebrę $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k(U)$ razem z podalgebrami $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k^{(p)}(U)$.

Pomysł. Rozważamy formę $\omega \in \Omega_k^{(1)}(U)$. Umiemy ją zróżniczkować jako odwzorowanie $\omega : U \rightarrow \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^n)$, otrzymując $d_x \omega \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^n))$. Chcemy określić formę pochodną $d\omega \in \Omega_{k+1}^{(0)}(U)$ przez analogię do $df \in \Omega_1^{(1)}(U)$ dla $f \in \Omega_0^{(1)}(U)$. Nie możemy wziąć odwzorowanie pochodnego, bo ono ma zły typ (nie ta przeciwdziedzina).

Definicja 18. Niech $\omega \in \Omega_k^{(1)}(U)$. Dla $x \in U$, $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ określamy

$$d\omega(x; v_0, \dots, v_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i (d_x \omega \cdot v_i)(v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_k) \in \mathbb{R}.$$

Różniczką zewnętrzną k -formy $\omega \in \Omega_k^{(1)}(U)$ nazywamy $d\omega$.

Propozycja 11. Niech $\omega \in \Omega_k^{(1)}(U)$. Zachodzi $d\omega \in \Omega_{k+1}^{(0)}(U)$.

Dowód. Przy ustalonym x oczywiście $d\omega(x) \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Jeśli $v_p = v_q = v$ dla $p < q$, to z antysymetryczności odwzorowań $d_x \omega \cdot v_i$ z tej sumy zostają wyrazy

$$(-1)^p (d_x \omega \cdot v)(v_0, \dots, \widehat{v_p}, \dots, v_k) + (-1)^q (d_x \omega \cdot v)(v_0, \dots, \widehat{v_q}, \dots, v_k).$$

Mamy

$$\begin{aligned} & (-1)^q (d_x \omega \cdot v)(v_0, \dots, v_p, \dots, v_{q-1}, v_{q+1}, \dots, v_k) = \\ & (-1)^{q+q-1-p} (d_x \omega \cdot v)(v_0, \dots, v_{p-1}, v_{p+1}, \dots, v_q, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Zatem to też się skraca i cała suma to 0. Mamy więc antysymetryczność. $\square$

Uwaga. Dla k -formy stałej ω mamy $d\omega = 0$, bo $d_x \omega = 0$.

Dla 0-formy $\omega = L|_U$ (gdzie L jest liniowe) dostajemy $d\omega(x; v) = d_x \omega \cdot v = L \cdot v$, czyli $d\omega \equiv L$ jest formą stałą.

W szczególności dla $x_i = e_i^*|_U$ dostajemy $dx_i \equiv e_i^*$, co tłumaczy przyjęte oznaczenie.

Twierdzenie 8. Niech $U \in \text{top } \mathbb{R}^n \setminus \{\emptyset\}$, $k, n \in \mathbb{N}$.

1. $d : \Omega_k^{(1)}(U) \ni \omega \rightarrow d\omega \in \Omega_{k+1}(U)$ jest liniowe.
2. Jeśli $f \in \Omega_0^{(1)}(U)$ i $\omega \in \Omega_k(U)$ jest formą stałą, to $d(f \cdot \omega) = df \wedge \omega$. W szczególności $d(f \cdot dx_\lambda) = df \wedge dx_\lambda = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_\lambda = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (dx_i \wedge dx_\lambda)$.
3. $d(\Omega_k^{(p)}(U)) \subseteq \Omega_{k+1}^{(p-1)}(U)$ dla $p \geq 1$.

Dowód. (1) Oczywiście z definicji.

Dla (2) i (3) przypadki $k > n$ i $k = 0$ są oczywiste.

(2) W postaci kanonicznej $\omega = \sum_{\lambda \in \wedge(k, n)} \omega_\lambda dx_\lambda$. Ze stałości ω mamy stałość każdego ω_λ . Z liniowości wystarczy zająć się przypadkiem $\omega = dx_\lambda$ (rozbijamy sumę i wyciągamy ω_λ). Rozważmy odwzorowanie liniowe $F_\lambda : \mathbb{R} \ni t \rightarrow t dx_\lambda \in \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^n)$. Wówczas $f dx_\lambda = F_\lambda \circ f : U \rightarrow \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^n)$.

Mamy

$$\begin{aligned} d(F_\lambda \circ f)(x; v_0, \dots, v_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i (d_x(F_\lambda \circ f) \cdot v_i)(v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_k) = \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i (d_x f \cdot v_i) dx_\lambda(v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i (d_x f \cdot v_i) \det [v_{j, \lambda(s)}]_{\substack{j \in \{0, \dots, \widehat{i}, \dots, k\} \\ s=1, \dots, k}} = \\ &= \det \begin{bmatrix} d_x f \cdot v_0 & \dots & d_x f \cdot v_k \\ v_{0, \lambda(1)} & \dots & v_{k, \lambda(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{0, \lambda(k)} & \dots & v_{k, \lambda(k)} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} d_x f \cdot v_0 & \dots & d_x f \cdot v_k \\ dx_{\lambda(1)}(v_0) & \dots & dx_{\lambda(1)}(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dx_{\lambda(k)}(v_0) & \dots & dx_{\lambda(k)}(v_k) \end{bmatrix} = \\ &= (d_x f \wedge dx_\lambda)(v_0, \dots, v_k) = (df \wedge dx_\lambda)(x; v_0, \dots, v_k). \end{aligned}$$

(3) Pisząc $\Omega_k^{(p)}(U) \ni \omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(k, n)} \omega_\lambda dx_\lambda$ mamy $\omega_\lambda \in \Omega_0^{(p)}(U)$ i dzięki poprzedniemu punktowi

$$d\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(k, n)} d(\omega_\lambda dx_\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda(k, n)} d\omega_\lambda \wedge dx_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda(k, n)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_\lambda.$$

Widać więc spadek klasy o 1 i wzrost rzędu o 1. $\square$

Twierdzenie 9. Dla $\alpha \in \Omega_p^{(1)}(U)$ i $\beta \in \Omega_q^{(1)}(U)$ mamy $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$.

Dowód. W przypadku, gdy $p = 0$ lub $q = 0$ wystarczy rozpisać jedną formę w postaci kanonicznej i przemnożyć jej współczynniki przez drugą formę (0-formę, czyli funkcję), a następnie skorzystać z liniowości różniczki zewnętrznej i wzoru na pochodną mnożenia. Jeśli $p > n$ lub $q > n$ to obie strony wynoszą 0. Załóżmy więc $1 \leq p, q \leq n$. Niech $\alpha = \sum_{\lambda \in \Lambda(p, n)} \alpha_\lambda dx_\lambda$ i $\beta = \sum_{\mu \in \Lambda(q, n)} \beta_\mu dx_\mu$.

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= \sum_{\lambda, \mu \in \Lambda(p, n)} d(\alpha_\lambda \beta_\mu) \wedge (dx_\lambda \wedge dx_\mu) = \sum_{\lambda, \mu \in \Lambda(p, n)} (d\alpha_\lambda \beta_\mu + \alpha_\lambda d\beta_\mu) \wedge (dx_\lambda \wedge dx_\mu) = \\ &= \sum_{\lambda, \mu \in \Lambda(p, n)} d\alpha_\lambda \wedge dx_\lambda \wedge \beta_\mu dx_\mu + \sum_{\lambda, \mu \in \Lambda(p, n)} (-1)^{1 \cdot p} \alpha_\lambda dx_\lambda \wedge d\beta_\mu \wedge dx_\mu = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta. \end{aligned}$$

$\square$

Twierdzenie 10. Niech $\omega \in \Omega_k^{(2)}(U)$. Wtedy $d(d\omega) = 0$.

Dowód. Dla $k \geq n$ mamy $d\omega \in \Omega_{k+1}^{(1)}(U) = \{0\}$. Dalej zakładamy $k < n$. Z liniowości różniczki zewnętrznej wystarczy rozważyć przypadek $\omega = f dx_\lambda$, gdzie $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy $\mathcal{C}^2$. $d\omega = df \wedge dx_\lambda = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_\lambda$, co daje

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \wedge dx_i \wedge dx_\lambda = \sum_{i, j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_\lambda = \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_\lambda = 0, \end{aligned}$$

gdzie ostatnie przejście to symetria różniczek. $\square$

Uwaga. Można pokazać, że to twierdzenie zachodzi również, gdy $\omega \in \Omega_k^{(1)}(U)$ i $d\omega \in \Omega_{k+1}^{(1)}(U)$, co nie znaczy, że ω jest klasy $\mathcal{C}^2$, o czym świadczy na przykład funkcja $f(x) = |x|^{\frac{3}{2}}$, która nie jest $\mathcal{C}^2$.

Niech $\omega : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \rightarrow yf(x) dx \in \mathcal{A}_1(\mathbb{R}^2)$. Widzimy, że $\omega \in \Omega_1^{(1)}(\mathbb{R}^2) \setminus \Omega_1^{(2)}(\mathbb{R}^2)$. Natomiast

$$d\omega = \left(\frac{\partial}{\partial x} (yf(x)) + \frac{\partial}{\partial y} (yf(x)) \right) \wedge dx = 0 + f(x) dy \wedge dx,$$

czyli $d\omega \in \Omega_2^{(1)}(\mathbb{R}^2) \setminus \Omega_2^{(2)}(\mathbb{R}^2)$.

Definicja 19. Niech $G \subseteq \mathbb{R}^p$ będzie otwarty i niech $g : G \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie różniczkowalny (a U otwarte). Dla $\omega \in \Omega_k(U)$ określamy $g^*\omega \in \Omega_k(G)$ wzorem

$$(g^*\omega)(x; v_1, \dots, v_k) = \omega(g(x); d_x g.v_1, \dots, d_x g.v_k)$$

dla $x \in G, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^p$. Odwzorowanie $g^* : \Omega_k(U) \rightarrow \Omega_k(G)$ nazywamy podstawieniem g .

Uwaga. Jeśli $k = 0$, to otrzymujemy składanie funkcji. Jeśli $k > n$, to $\Omega_k(U) = \{0\}$ i dostajemy $g^*\omega = 0$. Przy $1 \leq k \leq n$ dla $g = (g_1, \dots, g_n)$ i $\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(k, n)} \omega_\lambda dx_\lambda$ mamy

$$\begin{aligned} g^*\omega(x; v_1, \dots, v_k) &= \sum_{\lambda \in \Lambda(k, n)} \omega_\lambda(g(x)) (dx_{\lambda(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\lambda(k)}) (d_x g.v_1, \dots, d_x g.v_k) = \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda(k, n)} \omega_\lambda(g(x)) \det [d_x g_{\lambda(i)}.v_j]_{i,j=1}^k = \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda(k, n)} (\omega_\lambda \circ g)(x) (d_x g_{\lambda(1)} \wedge \dots \wedge d_x g_{\lambda(k)})(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Wprowadzamy oznaczenie $dg_\lambda(x) := d_x g_{\lambda(1)} \wedge \dots \wedge d_x g_{\lambda(k)}$, dla którego mamy

$$g^*\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(k, n)} (\omega_\lambda \circ g) dg_\lambda.$$

Aby sprowadzić ten zapis do postaci kanonicznej należy rozpisać $d_x g_{\lambda(i)} = \sum_{j=1}^p \frac{\partial g_{\lambda(i)}}{\partial x_j}(x) dx_j$ i wykonać mnożenie zewnętrzne.

Dla $p = n = k$ mamy $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ i musi nam wyjść $g^*\omega = h dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Mamy $g^*\omega = (f \circ g) dg_1 \wedge \dots \wedge dg_n$, czyli h jest równe

$$g^*\omega(x; e_1, \dots, e_n) = f(g(x)) (d_x g_1 \wedge \dots \wedge d_x g_n)(e_1, \dots, e_n) = f(g(x)) \det \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \right]_{i,j=1}^n.$$

Ostatecznie $g^*\omega = (f \circ g) \text{Jac } g dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

Propozycja 12. 1. $g^* : \Omega_k(U) \rightarrow \Omega_k(G)$ jest liniowe.

2. Gdy $k \geq 1$ a g jest klasy $\mathcal{C}^{q+1}$ (przy $q \in \{1, \dots, \infty\}$), to $g^*(\Omega_k^{(q)}(U)) \subseteq \Omega_k^{(q)}(G)$.

3. Gdy $k = 0$ a g jest klasy $\mathcal{C}^q$, to $g^*(\Omega_0^{(q)}(U)) \subseteq \Omega_0^{(q)}(U)$.

Dowód. Oczywiście dla $k = 0$ lub $k > n$. Dla $1 \leq k \leq n$ wynika z postaci $g^*\omega$:

$$g^*\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(k, n)} (\omega_\lambda \circ g) dg_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda(k, n)} (\omega_\lambda \circ g) \left(\sum_{j=1}^p \frac{\partial g_{\lambda(1)}}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j=1}^p \frac{\partial g_{\lambda(k)}}{\partial x_j} dx_j \right).$$

□

Propozycja 13. Niech $G \subseteq \mathbb{R}^p, U \subseteq \mathbb{R}^n$ i $D \subseteq \mathbb{R}^m$ będą otwarte. Niech $g : G \rightarrow U, h : D \rightarrow G$ będą różniczkowalne. Zachodzi $(g \circ h)^* = h^* \circ g^*$.

Dowód. Ustalmy $\omega \in \Omega_k(U)$, $k \geq 1$, $x \in G$, $w_1, \dots, w_k \in \mathbb{R}^p$. Mamy

$$g^* \omega(x; w_1, \dots, w_k) = \omega(g(x); d_x g \cdot w_1, \dots, d_x g \cdot w_k),$$

skąd dla $y \in D$, $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^m$ jest

$$\begin{aligned} h^*(g^* \omega)(y; v_1, \dots, v_k) &= (g^* \omega)(h(y); d_y h \cdot v_1, \dots, d_y h \cdot v_k) = \\ &= \omega(g(h(y)); d_{h(y)} g \cdot (d_y h \cdot v_1), \dots, d_{h(y)} g \cdot (d_y h \cdot v_k)) = (g \circ h)^* \omega(y; v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

□

Propozycja 14. Dla $\alpha \in \Omega_k(U)$, $\beta \in \Omega_\ell(U)$ mamy $g^*(\alpha \wedge \beta) = (g^* \alpha) \wedge (g^* \beta)$.

Dowód. Dla $1 \leq k, \ell \leq n$ mamy $\alpha = \sum_{\lambda \in \Lambda(k, n)} \alpha_\lambda dx_\lambda$, $\beta = \sum_{\mu \in \Lambda(\ell, n)} \beta_\mu dx_\mu$. Wobec dwuliniowości wystarczy przeliczyć, że

$$g^*(\alpha_\lambda \beta_\mu dx_\lambda \wedge dx_\mu) = g^*(\alpha_\lambda dx_\lambda) \wedge g^*(\beta_\mu dx_\mu).$$

Wynika to z tego, że

$$(\alpha_\lambda \beta_\mu \circ g) \cdot dg_\lambda \wedge dg_\mu = ((\alpha_\lambda \circ g) dg_\lambda) \wedge ((\beta_\mu \circ g) dg_\mu).$$

Jeśli któreś z k, ℓ jest równe 0, to mnożenie zewnętrzne staje się zwykłym mnożeniem. Jeśli $k > n$ lub $\ell > n$, to obie strony są zerowe. □

Twierdzenie 11. Niech $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $G \subseteq \mathbb{R}^p$ będą otwarte, $n, p \in \mathbb{N}$. Niech $g : G \rightarrow U$ będzie odwzorowaniem a $\omega \in \Omega_k^{(1)}(U)$ dla $k \in \mathbb{N}$. Zakładamy, że $k = 0$ i g jest klasy $\mathcal{C}^1$ lub, że $k \geq 1$ i g jest klasy $\mathcal{C}^2$. W takiej sytuacji $g^* d\omega = d(g^* \omega)$.

Dowód. W przypadku $k > n$ dostajemy 0 po obu stronach. Dla $k = 0$ i g klasy $\mathcal{C}^1$ mamy $g^* \omega = \omega \circ g$, a zatem $d(g^* \omega)(x) = d_x(\omega \circ g) = d_{g(x)} \omega \circ d_x g = (g^* d\omega)(x)$, bo dla $d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_i} dx_i$ mamy $g^* d\omega = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \circ g \right) dg_i$, gdzie $dg_i = \sum_{j=1}^p \frac{\partial g_i}{\partial \tau_j} d\tau_j$, w czym rozpoznajemy wzór na złożenie.

Dla $1 \leq k \leq n$ i g klasy $\mathcal{C}^2$ niech $\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(k, n)} \omega_\lambda dx_\lambda$. Mamy $g^* \omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(k, n)} (\omega_\lambda \circ g) dg_\lambda$, skąd

$$d(g^* \omega) = \sum_{\lambda \in \Lambda(k, n)} \left(d(\omega_\lambda \circ g) \wedge dg_\lambda + (-1)^0 (\omega_\lambda \circ g) \wedge d(dg_\lambda) \right).$$

Teraz

$$\begin{aligned} d(dg_\lambda) &= d(dg_{\lambda(1)} \wedge \dots \wedge dg_{\lambda(k)}) = \\ d(dg_{\lambda(1)}) \wedge (dg_{\lambda(2)} \wedge \dots \wedge dg_{\lambda(k)}) &+ (-1)^1 dg_{\lambda(1)} \wedge d(dg_{\lambda(2)} \wedge \dots \wedge dg_{\lambda(k)}) = 0. \end{aligned}$$

Pierwszy składnik zeruje się, bo $g_{\lambda(1)}$ jest klasy $\mathcal{C}^2$, a drugi zeruje się na mocy iteracji tego argumentu. Zatem

$$d(g^* \omega) = \sum_{\lambda \in \Lambda(k, n)} d(\omega_\lambda \circ g) \wedge dg_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda(k, n)} g^* d\omega_\lambda \wedge dg_\lambda = g^* \left(\sum_{\lambda \in \Lambda(k, n)} d\omega_\lambda \wedge dx_\lambda \right).$$

Pozostaje zauważyć, że $d(\omega_\lambda dx_\lambda) = d\omega_\lambda \wedge dx_\lambda$. □

4. Krzywe i drogi

2026-03-16

Definicja 20. Krzywą w $\mathbb{R}^n$ nazywamy dowolne odwzorowanie ciągłe $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, gdzie $a < b$ w $\mathbb{R}$.

Obraz geometryczny $\gamma^* = \gamma([a, b])$ jest zwarty i spójny, może być punktem.

Definicja 21. W zbiorze krzywych $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ mamy naturalną relację równoważności polegającą na tym, że $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dla $i = 1, 2$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje silnie rosnąca bijekcja $\tau : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$ taka, że $\gamma_2 \circ \tau = \gamma_1$.

Propozycja 15. 1. Funkcja monotoniczna ma co najwyżej $\aleph_0$ punktów nieciągłości i są to skoki, skąd wynika, że τ z powyższej definicji jest homeomorfizmem.
2. Zawsze możemy przyjąć, że dana krzywa sparametryzowana jest odcinkiem $[0, 1]$.
3. Jeśli $\gamma \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ jest iniektywna, to jest homeomorfizmem na swój obraz.

Definicja 22. Zmiana orientacji $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ to wzięcie $\ominus\gamma(t) = \gamma(a + b - t)$. Polega ona na zmianie kierunku obiegania γ^* .

Definicja 23. Sklejenie (suma) krzywych $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dla $i = 1, 2$ jest możliwe, jeśli $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Dane jest ono przez $\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$.

Definicja 24. Długością krzywej γ nazywamy

$$\lg(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{j=0}^k \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\| : t_0 = a < \dots < t_{k+1} = b, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Jest to supremum długości łamanych wpisanych w γ . Jeśli $\lg(\gamma) < +\infty$, to mówimy, że γ jest prostowalna.

Propozycja 16. $\lg(\gamma)$ nie zależy od wyboru „parametryzacji” – dwie krzywe równoważne mają tę samą długość. Nie zależy również od orientacji.

Uwaga. $\lg(\gamma)$ nie mierzy rozmiaru γ^* , a długość przebytej drogi po γ^* . Na przykład $\gamma(t) = e^{it} \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ dla $t \in [0, 4\pi]$ obiega dwukrotnie okrąg jednostkowy i $\lg(\gamma) = 4\pi$.

Propozycja 17. Dla $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $c \in (a, b)$ zachodzi $\lg(\gamma|_{[a, c]}) + \lg(\gamma|_{[c, b]}) = \lg(\gamma)$.

Dowód. Podziały aproksymacyjne połówek krzywej dają podział aproksymacyjny całej krzywej i na odwrót. $\square$

Wniosek.

$$\lg(\gamma_1 * \gamma_2) = \lg(\gamma_1) + \lg(\gamma_2).$$

Definicja 25. Krzywą γ nazywamy drogą, gdy jest kawałkami klasy $\mathcal{C}^1$, to znaczy istnieje podział $t_0 = a < \dots < b = t_{k+1}$ taki, że $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ jest klasy $\mathcal{C}^1$ (na końcach z pochodnymi jednostronnymi).

Twierdzenie 12. Każda droga jest prostowalna i $\lg(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$, gdzie rozważana norma jest euklidesowa.

Dowód. Z liniowości całki i zachowania długości krzywej względem sklejanego możemy założyć, że droga jest klasy $\mathcal{C}^1$. Prawa strona jest dobrze określona i skończona, bo pod całką mamy funkcję ciągłą.

Z definicji supremum istnieje ciąg podziałów $P_\nu = \{a = t_0^{(\nu)} < \dots < t_{k_\nu+1}^{(\nu)} = b\}$ taki, że $L(P_\nu) := \sum_{j=0}^{k_\nu} \|\gamma(t_{j+1}^{(\nu)}) - \gamma(t_j^{(\nu)})\| \rightarrow \lg(\gamma) \in [0, +\infty]$. Zagęszczenie danego przedziału zwiększa długość odpowiadającej mu łamanej, to znaczy dla $P'_\nu = P'_{\nu-1} \cup P_\nu$ mamy $L(P_\nu) \leq L(P'_\nu) \leq \lg(\gamma)$. Zatem $L(P'_\nu) \rightarrow \lg(\gamma)$. Dlatego można założyć, że $\text{diam } P_\nu \rightarrow 0$ (średnica podziału oznacza największą odległość między punktami podziału).

Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej dla $\gamma_i|_{[t_j^{(\nu)}, t_{j+1}^{(\nu)}]}$ (gdzie $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$) daje punkty pośrednie $\theta_{ij}^{(\nu)} \in [t_j^{(\nu)}, t_{j+1}^{(\nu)}]$ takie, że $\gamma_i(t_{j+1}^{(\nu)}) - \gamma_i(t_j^{(\nu)}) = \gamma'_i(\theta_{ij}^{(\nu)})(t_{j+1}^{(\nu)} - t_j^{(\nu)})$. Ze zwartości $[a, b]$ i ciągłości γ' mamy jednostajną ciągłość. Dla $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że jeśli $|t - \tau| < \delta$, to $\|\gamma'(t) - \gamma'(\tau)\| < \varepsilon$. Mamy $\text{diam } P_\nu < \delta$ dla $\nu \gg 1$, zatem możemy wybrać $\theta_j^{(\nu)} \in [t_j^{(\nu)}, t_{j+1}^{(\nu)}]$ takie, że $|\gamma'_i(\theta_{ij}^{(\nu)}) - \gamma'_i(\theta_j^{(\nu)})| < \varepsilon$ dla wszystkich i . Mamy

$$\begin{aligned} & \left| L(P_\nu) - \sum_{j=0}^{k_\nu} \|\gamma'(\theta_j^{(\nu)})\| (t_{j+1}^{(\nu)} - t_j^{(\nu)}) \right| = \\ & \left| \sum_{j=0}^{k_\nu} \left(\|\gamma'_1(\theta_{1j}^{(\nu)})\|, \dots, \|\gamma'_n(\theta_{nj}^{(\nu)})\| \right) (t_{j+1}^{(\nu)} - t_j^{(\nu)}) - \sum_{j=0}^{k_\nu} \|\gamma'(\theta_j^{(\nu)})\| (t_{j+1}^{(\nu)} - t_j^{(\nu)}) \right| \leq \\ & \sum_{j=0}^{k_\nu} \left| \left(\|\gamma'_1(\theta_{1j}^{(\nu)})\|, \dots, \|\gamma'_n(\theta_{nj}^{(\nu)})\| \right) - \|\gamma'(\theta_j^{(\nu)})\| \right| (t_{j+1}^{(\nu)} - t_j^{(\nu)}) \leq \sqrt{n}\varepsilon(b-a), \end{aligned}$$

gdzie ostatnie przejście to skorzystanie z tego, że jeśli $|x_i - y_i| < \varepsilon$ dla $i = 1, \dots, n$, to zachodzi $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| < \sqrt{n}\varepsilon$. Zatem przechodząc $\varepsilon \rightarrow 0$ dostajemy, że $L(P_\nu)$ zbiega do tego samego, co suma aproksymacyjna całki Riemanna. $\square$

Wniosek. Dla drogi parametryzującej wykres $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (czyli $\gamma(t) = (t, f(t))$) otrzymujemy $\text{lg}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$.

5. Całki krzywoliniowe

2026-03-19

Definicja 26. Niech $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie krzywą a $f : \gamma^* \rightarrow \mathbb{R}$ funkcją ograniczoną. Niech P będzie podziałem odcinka $t_0 = a < \dots < t_{k+1} = b$ a $\Xi = \{\xi_0, \dots, \xi_k\}$ zbiorem punktów pośrednich $\xi_j \in [t_j, t_{j+1}]$. Oznaczamy riemannowską sumę aproksymacyjną przez

$$S_\gamma(P, \Xi, f) := \sum_{j=0}^k f(\gamma(\xi_j)) \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\|.$$

Jeśli $\text{diam } P_\nu \rightarrow 0$ implikuje, że granica $\lim_{\nu \rightarrow \infty} S_\gamma(P_\nu, \Xi_\nu, f)$ istnieje i jest skończona oraz jeśli jest ona niezależna od wyboru punktów pośrednich i podziałów, to nazywamy tę granicę całką krzywoliniową niezorientowaną z f po γ i oznaczamy ją $\int_\gamma f d\ell$.

Uwaga. Gdy $\int_\gamma f d\ell$ istnieje, to nie zależy od parametryzacji krzywej, czyli $\int_\gamma f d\ell = \int_{\tilde{\gamma}} f d\ell$ gdy $\gamma \sim \tilde{\gamma}$ (bo rosnąca bijekcja o tym świadcząca jest ciągła). Nie zależy też od orientacji krzywej.

Definicja 27. Gdy istnieje $\int_\gamma f d\ell$, to mówimy, że f jest całkowalna na γ .

Propozycja 18. Dla $c \in (a, b)$ f jest całkowalna na γ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest całkowalna na $\gamma|_{[a, c]}$ i $\gamma|_{[c, b]}$ i wtedy $\int_\gamma f d\ell = \int_{\gamma|_{[a, c]}} f d\ell + \int_{\gamma|_{[c, b]}} f d\ell$.

Dowód. ($\implies$) Niech $\gamma_1 = \gamma|_{[a, c]}$ i $\gamma_2 = \gamma|_{[c, b]}$. Niech $P_1^{(\nu)}, P_2^{(\nu)}$ będą podziałami $[a, c]$ o malejących średnicach a $\Xi_1^{(\nu)}$ i $\Xi_2^{(\nu)}$ wyborami punktów pośrednich w nich. Niech $P_2^{(\nu)}$ i $\Xi_2^{(\nu)}$ będą odpowiednimi podziałami $[c, b]$ i wyborami punktów pośrednich. Ze zwartości $[b, c]$ i ograniczoneści f możemy założyć, że $S_{\gamma_2}(P_2^{(\nu)}, \Xi_2^{(\nu)}, f) \rightarrow J_2$. Jeśli $S_{\gamma_1}(P_1^{(\nu)}, \Xi_1^{(\nu)}, f) \rightarrow J_1$ i $S_{\gamma_1}(P_1^{(\nu)}, \Xi_1^{(\nu)}, f) \rightarrow J'_1$, to łącząc podziały dostajemy $J_1 + J_2 = \int_\gamma f d\ell = J'_1 + J_2$, więc $J_1 = J'_1$. Gdyby któryś z tych ciągów sum aproksymacyjnych był rozbieżny, to otrzymany z niego ciąg dla całego γ byłby rozbieżny, co nie może zachodzić. To kończy dowód.

($\Leftarrow$) Niech P'_ν, Ξ'_ν będą podziałem $[a, b]$ i wyborem punktów pośrednich. Ustalamy $P_\nu = P'_\nu \cup \{c\}$ i Ξ_ν dodając do Ξ'_ν wartość dla przedziału, dla którego nie ma wartości. Mamy $S_\gamma(P_\nu, \Xi_\nu, f) \rightarrow \int_{\gamma_1} f \, d\ell + \int_{\gamma_2} f \, d\ell$. Niech $k_\nu, t_\nu \in P'_\nu$ będą kolejnymi punktami takimi, że $c \in [k_\nu, t_\nu]$. Niech $\xi_\nu, \eta_\nu \in \Xi'_\nu$ będą takie, że $\xi_\nu \in [k_\nu, c]$ i $\eta_\nu \in [c, t_\nu]$. Bez straty ogólności założymy, że $\xi_\nu \in \Xi'_\nu$. Mamy

$$\begin{aligned} & |S_\gamma(P_\nu, \Xi_\nu, f) - S_\gamma(P'_\nu, \Xi'_\nu, f)| = \\ & |f(\gamma(\xi_\nu)) \|\gamma(c) - \gamma(k_\nu)\| + f(\gamma(\eta_\nu)) \|\gamma(t_\nu) - \gamma(c)\| - f(\gamma(\xi_\nu)) \|\gamma(t_\nu) - \gamma(k_\nu)\|| \leq \\ & \sup_{\gamma^*} |f| \varepsilon + \sup_{\gamma^*} |f| |\|\gamma(c) - \gamma(k_\nu)\| - \|\gamma(t_\nu) - \gamma(k_\nu)\|| \leq 2 \sup_{\gamma^*} |f| \varepsilon, \end{aligned}$$

gdzie przedostatnie przejście to skorzystanie z jednostajnej ciągłości γ – dla $\text{diam } P'_\nu < \delta$ mamy $\|\gamma(t_\nu) - \gamma(c)\| < \varepsilon$. Potem korzystamy z odwrotnej nierówności trójkąta i znowu z małej średnicy podziału. Wobec dowolności ε dostajemy zbieżność $S_\gamma(P'_\nu, \Xi'_\nu, f)$ do odpowiedniej wartości. $\square$

Definicja 28. Definiujemy $\mathcal{R}(\gamma) = \{f : \gamma^* \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ograniczona i całkowalna na } \gamma\}$. Jest to przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{R}$ a $\int_\gamma : \mathcal{R}(\gamma) \ni f \rightarrow \int_\gamma f \, d\ell \in \mathbb{R}$ jest operatorem liniowym.

Twierdzenie 13. Dla funkcji ciągłej $f : \gamma^* \rightarrow \mathbb{R}$ określonej na drodze $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mamy $f \in \mathcal{R}(\gamma)$ i ponadto $\int_\gamma f \, d\ell = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt$.

Dowód. Z liniowości całki możemy założyć, że droga jest klasy $\mathcal{C}^1$. Prawa strona jest dobrze określona i skończona, bo pod całką mamy funkcję ciągłą.

Ustalmy ciąg podziałów $P_\nu = \{a = t_0^{(\nu)} < \dots < t_{k_\nu+1}^{(\nu)} = b\}$ taki, że $\text{diam } P_\nu \rightarrow 0$ i wybór punktów pośrednich Ξ_ν w nim.

Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej dla $\gamma_i|_{[t_j^{(\nu)}, t_{j+1}^{(\nu)}]}$ (gdzie $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$) daje punkty pośrednie $\theta_{ij}^{(\nu)} \in [t_j^{(\nu)}, t_{j+1}^{(\nu)}]$ takie, że $\gamma_i(t_{j+1}^{(\nu)}) - \gamma_i(t_j^{(\nu)}) = \gamma'_i(\theta_{ij}^{(\nu)}) (t_{j+1}^{(\nu)} - t_j^{(\nu)})$. Ze zwartości $[a, b]$ i ciągłości γ' mamy jednostajną ciągłość. Dla $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że jeśli $|t - \tau| < \delta$, to $|\gamma'(t) - \gamma'(\tau)| < \varepsilon$. Mamy $\text{diam } P_\nu < \delta$ dla $\nu \gg 1$, zatem możemy wybrać $\theta_j^{(\nu)} \in [t_j^{(\nu)}, t_{j+1}^{(\nu)}]$ takie, że $|\gamma'_i(\theta_{ij}^{(\nu)}) - \gamma'_i(\theta_j^{(\nu)})| < \varepsilon$ oraz $|\gamma'_i(\xi_j) - \gamma'_i(\theta_j)| < \varepsilon$ dla wszystkich i . Mamy

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=0}^{k_\nu} f(\gamma(\xi_j^{(\nu)})) \|\gamma(t_{j+1}^{(\nu)}) - \gamma(t_j^{(\nu)})\| - \sum_{j=0}^{k_\nu} f(\gamma(\xi_j^{(\nu)})) \|\gamma'(\xi_j^{(\nu)})\| (t_{j+1}^{(\nu)} - t_j^{(\nu)}) \right| \leq \\ & \sum_{j=0}^{k_\nu} |f(\gamma(\xi_j^{(\nu)}))| \cdot (|\|(\gamma'_1(\theta_{1j}^{(\nu)}), \dots, \gamma'_n(\theta_{nj}^{(\nu)}))\| (t_{j+1}^{(\nu)} - t_j^{(\nu)}) - \|\gamma'(\theta_j^{(\nu)})\| (t_{j+1}^{(\nu)} - t_j^{(\nu)})| + \\ & \|\gamma'(\theta_j^{(\nu)})\| (t_{j+1}^{(\nu)} - t_j^{(\nu)}) - \|\gamma'(\xi_j^{(\nu)})\| (t_{j+1}^{(\nu)} - t_j^{(\nu)})|) \leq \\ & \sup_{\gamma^*} |f| \sum_{j=0}^{k_\nu} (|\|(\gamma'_1(\theta_{1j}^{(\nu)}), \dots, \gamma'_n(\theta_{nj}^{(\nu)}))\| - \|\gamma'(\theta_j^{(\nu)})\|| (t_{j+1}^{(\nu)} - t_j^{(\nu)}) + \\ & \|\gamma'(\theta_j^{(\nu)})\| - \|\gamma'(\xi_j^{(\nu)})\|| (t_{j+1}^{(\nu)} - t_j^{(\nu)})|) \leq \\ & 2 \sup_{\gamma^*} |f| \sqrt{n} \varepsilon (b - a), \end{aligned}$$

gdzie ostatnie przejście to skorzystanie z tego, że jeśli $|x_i - y_i| < \varepsilon$ dla $i = 1, \dots, n$, to zachodzi $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| < \sqrt{n} \varepsilon$. Zatem przechodząc $\varepsilon \rightarrow 0$ dostajemy tezę, bo druga z odejmowanych sum zbiega do odpowiedniej całki Riemanna. $\square$

Uwaga. Kładąc $f \equiv 1$ odzyskujemy wzór na długość drogi.

Definicja 29. Dla $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otwartego i niepustego polem wektorowym na Ω nazywamy dowolne odwzorowanie $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Mówimy o polu klasy $\mathcal{C}^k$, gdy F jest klasy $\mathcal{C}^k$.

Definicja 30. Niech $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie drogą taką, że $\gamma^* \subseteq \Omega$. Niech F będzie ciągłym polem na Ω . Wydażność pola F wzdłuż γ określamy jako całkę $\int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$.

Uwaga. Całka jest dobrze określona, bo funkcja podcałkowa jest przedziałami ciągła. Popatrzmy na sumy aproksymacyjne

$$S(P, \Xi, F; \gamma) = \sum_{j=0}^k \langle F(\gamma(\xi_j)), \gamma'(\xi_j) \rangle (t_{j+1} - t_j) = \sum_{j=0}^k \langle F(\gamma(\xi_j)), \gamma'(\xi_j) \rangle (t_{j+1} - t_j).$$

Dla ξ_j będącego blisko odpowiedniego punktu pośredniego mamy $\gamma'(\xi_j)(t_{j+1} - t_j) \approx \gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)$. Można to interpretować jako ustalenie wartości pola $F(\gamma(\xi_j))$ na całym odcinku od $\gamma(t_j)$ do $\gamma(t_{j+1})$ i wymnożeniu tego pola (siły) przez przesuniecie, co w fizyce daje nam pracę. Stąd nazwa „wydażność”.

Definicja 31. Dla pola wektorowego $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ na zbiorze otwartym $U \subseteq \mathbb{R}^n$ możemy określić skojarzoną z nim 1-formę różniczkową (1-formy nazywamy też formami Pfaffa) ω_F zadaną przez $\omega_F = F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n \in \Omega_1(U)$.

Mając dodatkowo drogę $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ definiujemy $\int_\gamma \omega_F$ jako granicę sum $\tilde{S}_\gamma(P_\nu, \Xi_\nu, F) := \sum_{j=0}^k \langle F(\gamma(\xi_j^{(\nu)})), \gamma(t_{j+1}^{(\nu)}) - \gamma(t_j^{(\nu)}) \rangle$, o ile ta granica istnieje przy $\text{diam } P_\nu \rightarrow 0$, jest skończona i niezależna od wyboru podziału P_ν i punktów pośrednich Ξ_ν .

Uwaga. Wynik nie zależy od wyboru parametryzacji, ale za to zmiana orientacji zmienia znak: $\int_{\ominus \gamma} \omega_F = - \int_\gamma \omega_F$. W dalszym ciągu $\int_{\gamma_1 * \gamma_2} \omega_F = \int_{\gamma_1} \omega_F + \int_{\gamma_2} \omega_F$ i ponownie otrzymujemy operator liniowy $F \rightarrow \int_\gamma \omega_F$.

Twierdzenie 14. Dla pola ciągłego $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ i drogi $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ istnieje całka $\int_\gamma \omega_F$ i $\int_\gamma \omega_F = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$.

Dowód. Z liniowości całki możemy założyć, że droga jest klasy $\mathcal{C}^1$. Prawa strona jest dobrze określona i skończona, bo pod całką mamy funkcję ciągłą.

Ustalmy ciąg podziałów $P_\nu = \{a = t_0^{(\nu)} < \dots < t_{k_\nu+1}^{(\nu)} = b\}$ taki, że $\text{diam } P_\nu \rightarrow 0$ i wybór punktów pośrednich Ξ_ν w nim.

Twierdzenie Lagrange’a o wartości średniej dla $\gamma_i|_{[t_j^{(\nu)}, t_{j+1}^{(\nu)}]}$ (gdzie $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$) daje punkty pośrednie $\theta_{ij}^{(\nu)} \in [t_j^{(\nu)}, t_{j+1}^{(\nu)}]$ takie, że $\gamma_i(t_{j+1}^{(\nu)}) - \gamma_i(t_j^{(\nu)}) = \gamma'_i(\theta_{ij}^{(\nu)})(t_{j+1}^{(\nu)} - t_j^{(\nu)})$. Ze zwartości $[a, b]$ i ciągłości γ' mamy jednostajną ciągłość. Dla $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że jeśli $|t - \tau| < \delta$, to $|\gamma'(t) - \gamma'(\tau)| < \varepsilon$. Mamy $\text{diam } P_\nu < \delta$ dla $\nu \gg 1$, zatem możemy wybrać $\theta_j^{(\nu)} \in [t_j^{(\nu)}, t_{j+1}^{(\nu)}]$ takie, że $|\gamma'_i(\theta_{ij}^{(\nu)}) - \gamma'_i(\theta_j^{(\nu)})| < \varepsilon$ oraz $|\gamma'_i(\xi_j) - \gamma'_i(\theta_j)| < \varepsilon$ dla wszystkich i . Mamy

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{j=0}^{k_\nu} \langle F(\gamma(\xi_j^{(\nu)})), \gamma(t_{j+1}^{(\nu)}) - \gamma(t_j^{(\nu)}) \rangle - \sum_{j=0}^{k_\nu} \langle F(\gamma(\xi_j^{(\nu)})), \gamma'(\xi_j) \rangle (t_{j+1}^{(\nu)} - t_j^{(\nu)}) \right| \leq \\
 & \sum_{j=0}^{k_\nu} \left| \langle F(\gamma(\xi_j^{(\nu)})), \gamma(t_{j+1}^{(\nu)}) - \gamma(t_j^{(\nu)}) - \gamma'(\xi_j^{(\nu)})(t_{j+1}^{(\nu)} - t_j^{(\nu)}) \rangle \right| \leq \\
 & \sum_{j=0}^{k_\nu} \|F(\gamma(\xi_j^{(\nu)}))\| \|\gamma(t_{j+1}^{(\nu)}) - \gamma(t_j^{(\nu)}) - \gamma'(\xi_j^{(\nu)})(t_{j+1}^{(\nu)} - t_j^{(\nu)})\| \leq \\
 & \sup_{\gamma^*} \|F\| \sum_{j=0}^{k_\nu} \left\| \left(\gamma'_1(\theta_{ij}^{(\nu)}), \dots, \gamma'_n(\theta_{nj}^{(\nu)}) \right) (t_{j+1}^{(\nu)} - t_j^{(\nu)}) - \gamma'(\theta_j^{(\nu)})(t_{j+1}^{(\nu)} - t_j^{(\nu)}) \right\| + \\
 & \left\| \gamma'(\theta_j^{(\nu)})(t_{j+1}^{(\nu)} - t_j^{(\nu)}) - \gamma'(\xi_j^{(\nu)})(t_{j+1}^{(\nu)} - t_j^{(\nu)}) \right\| \leq \\
 & 2 \sup_{\gamma^*} \|F\| \sqrt{n} \varepsilon (b - a),
 \end{aligned}$$

gdzie ostatnie przejście to skorzystanie z tego, że jeśli $|x_i - y_i| < \varepsilon$ dla $i = 1, \dots, n$, to zachodzi $\|x - y\| < \sqrt{n}\varepsilon$. Zatem przechodząc $\varepsilon \rightarrow 0$ (supremum jest skończone, bo γ^* jest zwarty) dostajemy tezę, bo druga z odejmowanych sum zbiega do odpowiedniej całki Riemanna. $\square$

Uwaga. Mamy $\omega_F = \sum_{i=1}^n F_i dx_i$ i możemy podstawić γ : $\gamma^* \omega_F = \sum_{i=1}^n (F_i \circ \gamma) d\gamma_i$, gdzie $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ i $d\gamma_i = \gamma'_i(t) dt$. Zatem $\gamma^* \omega_F = \langle F \circ \gamma, \gamma' \rangle dt$. Można więc napisać $\int_\gamma \omega_F = \int_a^b \gamma^* \omega_F$ (gdzie po prawej stronie $\int_a^b$ oznacza całkę po krzywej identycznościowej na $[a, b]$).

Definicja 32. Pole ciągłe $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazywamy potencjalnym, gdy istnieje $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalne i takie, że $\nabla f = F$ (wtedy f musi być klasy $\mathcal{C}^1$). W tej sytuacji f zwiemy potencjałem.

Propozycja 19. Jeśli pole F jest potencjalne i f jest jego potencjałem a $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest drogą, to $\int_\gamma \omega_F = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$, czyli wydajność F wzdłuż γ liczymy jako różnicę wartości potencjału na końcach drogi γ . W szczególności dla drogi zamkniętej (z $\gamma(a) = \gamma(b)$) otrzymujemy 0.

Dowód.

$$\int_\gamma \omega_F = \int_a^b \langle F \circ \gamma, \gamma' \rangle dt = \int_a^b \langle \nabla f \circ \gamma, \gamma' \rangle dt = \int_a^b (f \circ \gamma)' dt = (f \circ \gamma)(b) - (f \circ \gamma)(a).$$

$\square$

Lemat 1. Niech $G \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie otwarty i niepusty, niech $f : G \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągłą. Oznaczmy $g(x) = \int_0^1 f(x, t) dt$ dla $x \in G$. Załóżmy, że dla każdego $\alpha \in \mathbb{N}^n$ o $|\alpha| \leq p$ (gdzie $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) pochodna $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}$ istnieje i jest ciągła w $G \times [0, 1]$. Wtedy g jest klasy $\mathcal{C}^p$ i $\frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x^\alpha}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x, t) dt$.

Dowód. Wystarczy rozważyć $p = 0, 1$, bo $p > 1$ wynika z iteracji tego argumentu.

Dla $p = 0$ ustalmy $a \in G$, $\overline{K}(a, r) \subseteq G$ i mamy jednostajnie ciągłą funkcję $f|_{\overline{K}(a, r) \times [0, 1]}$, a więc $|f(x, t) - f(a, t)| < \varepsilon$ dla $x \in K(a, \delta(\varepsilon)) \subseteq \overline{K}(a, r)$. Stąd $|g(x) - g(a)| \leq \int_0^1 \varepsilon dt = \varepsilon$.

Dla $p = 1$ i $i \in \{1, \dots, n\}$ wystarczy pokazać, że istnieje $\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(a, t) dt$. Z jednostajnej ciągłości $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ jak wyżej mamy $\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a, t) \right| < \varepsilon$ dla $x \in K(a, \delta(\varepsilon))$. Stąd

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{g(a + \tau e_i) - g(a)}{\tau} - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(a, t) dt \right| \leq \frac{1}{|\tau|} \int_0^1 \left| f(a + \tau e_i, t) - f(a, t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a, t) \tau \right| dt \leq \\
 & \sup_{s \in [0, |\tau|]} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + s e_i, t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a, t) \right| < \varepsilon,
 \end{aligned}$$

gdzie przedostatnie przejście to twierdzenie o przyrostach. $\square$

Twierdzenie 15 (Charakteryzacja pól potencjalnych w $\mathbb{R}^2$). Niech $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie polem klasy $\mathcal{C}^1$, $F = (p, q)$. Niech $\omega = p dx + q dy \in \Omega_1^{(1)}(\mathbb{R}^2)$. Następujące warunki są równoważne.

1. Dla każdej pary dróg $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ o wspólnych końcach (czyli $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ i $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$) mamy $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.
2. Istnieje funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^2$ taka, że $\omega = df$. Równoważnie $\nabla f = F$.
3. $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ w $\mathbb{R}^2$.
4. $\int_{\gamma} \omega = 0$ dla każdej drogi zamkniętej γ .

Dowód. (1 $\implies$ 2) Niech $a, b \in \mathbb{R}^2$. Oznaczmy przez $\gamma_{a,b}$ krzywą łączącą a z b skierowaną od a do b . Możemy przyjąć, że jest ona odcinkiem. Ustalmy dowolny punkt $b = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ i niech $a = (0, 0)$. Można określić $f(b) = \int_{\gamma_{a,b}} \omega$ i nie zależy to od wyboru drogi. Wystarczy pokazać, że f ma pochodne cząstkowe i są one równe odpowiednio p i q , bo te funkcje są klasy $\mathcal{C}^1$, więc f będzie klasy $\mathcal{C}^2$. Dla ustalonego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$f(b + te_1) - f(b) = \int_{\gamma_{a,b+te_1}} \omega - \int_{\gamma_{a,b}} \omega = \int_{\gamma_{a,b+te_1}} \omega + \int_{\ominus \gamma_{a,b}} \omega = \int_{\gamma_{a,b+te_1}} \omega + \int_{\gamma_{b,a}} \omega = \int_{\gamma_{b,b+te_1}} \omega.$$

$\gamma'_{b,b+te_1}(s) = te_1$, więc $\int_0^1 \gamma_{b,b+te_1}^* \omega = \int_0^1 \langle (p, q) \circ \gamma_{b,b+te_1}(s), te_1 \rangle ds = \int_0^1 p(x + ste_1, y) t ds$. Ostatecznie

$$\left| \frac{f(b + te_1) - f(b)}{t} - p(b) \right| \leq \int_0^1 |p(b + ste_1) - p(b)| ds \leq \max_{s \in [0,1]} |p(b + ste_1) - p(b)| \rightarrow 0.$$

To daje nam $\frac{\partial f}{\partial x}(b) = p(b)$. Analogicznie $\frac{\partial f}{\partial y}(b) = q(b)$.

(2 $\implies$ 3) Mamy $p = \frac{\partial f}{\partial x}$ i $q = \frac{\partial f}{\partial y}$. Teza wynika z symetrii drugich pochodnych.

(2 $\implies$ 4) Praca pola potencjalnego po drodze zamkniętej wynosi 0.

(4 $\implies$ 1) Z dwóch dróg γ_1, γ_2 jak w (1) robimy drogę zamkniętą $\gamma = \gamma_1 * \ominus \gamma_2$. Wtedy

$$0 = \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\ominus \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega.$$

(3 $\implies$ 2) Ustalmy $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Mamy

$$\begin{aligned} p(z) &= p(z) - 0 \cdot p(0 \cdot z) = \int_0^1 \frac{d}{dt} (tp(tz)) dt = \int_0^1 (p(tz) + \langle \nabla p(tz), z \rangle t) dt = \\ &= \int_0^1 \left(p(tz) + \frac{\partial p}{\partial x}(tz) xt + \frac{\partial p}{\partial y}(tz) yt \right) dt = \int_0^1 \left(p(tz) + \frac{\partial p}{\partial x}(tz) xt + \frac{\partial q}{\partial x}(tz) yt \right) dt = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 \langle F(tz), z \rangle dt, \end{aligned}$$

gdzie ostatnie to wyjście z różniczkowaniem przed całką. Kładziemy $f(z) = \int_0^1 \langle F(tz), z \rangle dt$. $\square$

Notacja. Dla funkcji $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^1$ mamy operator ∇ gradientu: $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$.

Definicja 33. Niech $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie potem klasy $\mathcal{C}^1$. Wprowadzamy operator dywergencji pola $\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$, co nieformalnie można zapisać $\operatorname{div} = \langle \nabla, \cdot \rangle$.

Definicja 34. Dla $n = 3$ wprowadzamy operator rotacji (wirowości) pola F klasy $\mathcal{C}^1$ zadany jako

$$\operatorname{rot} = \nabla \times \cdot, \text{ czyli } \operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Uwaga. Dla $n = 2$ i pola $F = (p, q)$ oraz związanej z nim formy $p dx + q dy$ dywergencja mierzy ściśliwość pola F . Ustalmy $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ i mały prostokąt o środku w tym punkcie i bokach $\Delta x, \Delta y$. Zastanawiamy się, ile strumienia F wypływa przez boki prostokąta. Jest to suma wektorów pola na krawędzi prostokąta.

Na pionowych krawędziach mamy $W_y(\Delta x, \Delta y) = \Delta y (p(x + \frac{\Delta x}{2}, y) - p(x - \frac{\Delta x}{2}, y))$, co po podzieleniu przez pole prostokąta dąży do $\frac{\partial p}{\partial x}(x, y)$. Analogicznie jest na drugiej współrzędnej, zatem $\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{W(\Delta x, \Delta y)}{\Delta x \Delta y} = \operatorname{div} F$.

Rotację można zinterpretować podobnie patrząc na przekroje $\mathbb{R}^3$ płaszczyznami $\mathbb{R}^2 \times \{z\}$ i na prostokąty z brzegiem zorientowanym (tradycyjnie w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara).

Uwaga. Dla $n = 3$ oznaczmy $\alpha_F = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ i $\omega_F = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$. Wówczas

1. $\alpha_{\nabla f} = df$.
2. $d\alpha_F = \omega_{\operatorname{rot} F}$.
3. $d\omega_F = \operatorname{div} F dx \wedge dy \wedge dz$.
4. $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$.
5. $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$.

Jeśli $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ jest obszarem gwiazdzistym, to $\operatorname{rot} F = 0$ implikuje, że pole jest potencjalne, a $\operatorname{div} F = 0$ implikuje, że $F = \operatorname{rot} G$ dla pewnego pola G .

Niech $\mathcal{H}(U) = \{F : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid F \text{ klasy } \mathcal{C}^\infty\}$. Poniższy wykres jest przemienny, a A, B, C są izomorfizmami.

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega_0^{(\infty)}(U) & \xrightarrow{d} & \Omega_1^{(\infty)}(U) & \xrightarrow{d} & \Omega_2^{(\infty)}(U) & \xrightarrow{d} & \Omega_3^{(\infty)}(U) \xrightarrow{d} \{0\} \\ \uparrow \operatorname{id} & & \uparrow A(F)=\alpha_F & & \uparrow B(F)=\omega_F & & \uparrow C(f)=f dx \wedge dy \wedge dz \\ \Omega_0^{(\infty)}(U) & \xrightarrow{\nabla} & \mathcal{H}(U) & \xrightarrow{\operatorname{rot}} & \mathcal{H}(U) & \xrightarrow{\operatorname{div}} & \Omega_0^{(\infty)}(U) \end{array}$$

Uwaga. Rozważmy pole ciągle $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Rozwiązaniem równania $x' = F(x)$ nazywamy dowolną krzywą różniczkowalną $x : (0, T) \rightarrow \Omega$ taką, że $x'(t) = F(x(t))$. Z ciągłości F wynika klasa $\mathcal{C}^1$ odwzorowania x .

6. Formy zamknięte i dokładne

2026-03-26

Definicja 35. Niech $U \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie otwarte, $n \in \mathbb{N}_+$, $k \in \mathbb{N}$. Formę $\omega \in \Omega_k^{(1)}(U)$ nazywamy zamkniętą, gdy $d\omega = 0$. W przypadku $k \geq 1$ formę $\omega \in \Omega_k(U)$ nazywamy dokładną (zupełną), jeśli istnieje $\alpha \in \Omega_{k-1}^{(1)}(U)$ takie, że $d\alpha = \omega$. Formę α nazywamy pierwotną formy ω .

Mówimy, że ω jest lokalnie dokładna, jeśli dla każdego $a \in U$ istnieje otoczenie $a \in V \subseteq U$ takie, że $\omega|_V$ jest dokładna.

Uwaga. Formy (lokalnie) dokładne są ciągłe, natomiast pierwotna nie musi być klasy wyższej niż klasa ω .

Przykład. $\omega = -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \in \Omega_1^{(\infty)}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. Możemy wyliczyć

$$d\omega = -\frac{x^2+y^2-2y \cdot y}{(x^2+y^2)^2} dy \wedge dx + \frac{x^2+y^2-2x \cdot x}{(x^2+y^2)^2} dx \wedge dy = 0.$$

Zatem ω jest zamknięta.

Niech $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ będzie półpłaszczyzną. Rozważmy 0-formę $\alpha : V \ni (x, y) \rightarrow \arctan \frac{y}{x} \in \mathbb{R}$. Wtedy $d\alpha = -\frac{y}{x^2} \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} dx + \frac{1}{x} \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} dy = \omega|_V$. Można to powtórzyć dla innego zbioru otwartego V , byle było $x \neq 0$. Zatem ω jest lokalnie dokładna.

Założmy, że istnieje $\alpha \in \Omega_0^{(1)}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ taka, że $d\alpha = \omega$. Niech $g(t) = (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dla $t \in \mathbb{R}$. Definiujemy $f(t) = (g^*\omega)(t, e_1)$. Zauważmy, że $g^*\omega = f dt$. Funkcja f jest ciągła, więc ma całkę Cauchy'ego

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = \int_0^{2\pi} g^*(d\alpha)(t, e_1) dt = \int_0^{2\pi} d(g^*\alpha)(t) dt = g^*\alpha(2\pi) - g^*\alpha(0) = 0.$$

Z drugiej strony $f(t) = \frac{-\sin t}{1} d(\cos t) \cdot e_1 + \frac{\cos t}{1} d(\sin t) \cdot e_1 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$. Sprzeczność. Zatem ω jest zamknięta i lokalnie dokładna, ale nie dokładna.

Uwaga. Formy zamknięte najłatwiej otrzymać z $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^2$ biorąc $\omega = df$. Przykłady takie jak wyżej otrzymujemy z liczb zespolonych. Dla holomorficznej funkcji $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ możemy rozpisać $f = u + iv$ i $dz = dx + i dy$. Wtedy

$$f dz = (u + iv)(dx + i dy) = (u dx - v dy) + i(v dx + u dy) =: \alpha + i\beta.$$

α i β są 1-formami analitycznymi. Mamy

$$d\alpha = du \wedge dx - dv \wedge dy = u_y dy \wedge dx - v_x dx \wedge dy = (u_y + v_x) dy \wedge dx$$

i podobnie $d\beta = (v_y + u_x) dx \wedge dy$. Równania Cauchy'ego-Riemanna ($\mathbb{C}$ -liniowość $d_{(x,y)}^{\mathbb{R}} f$) mówią, że obie te wartości się zerują, zatem α i β są zamknięte. Aby nie były dokładne wystarczy, by f miała osobliwość, na przykład $f(z) = \frac{1}{z}$. Wtedy $f dz = \frac{1}{z} dz = \frac{\bar{z}}{|z|^2} dz = \frac{x-iy}{x^2+y^2} (dx + i dy)$ i rozpisując dostajemy $\beta = \omega$, gdzie ω to forma rozważana w poprzednim przykładzie.

Definicja 36. Zbiór $G \subseteq \mathbb{R}^n$ jest gwiaździsty względem $a \in G$, gdy dla każdego $x \in G$ mamy $[a, x] \subseteq G$. Każdy zbiór gwiaździsty jest drogowo spójny.

Definicja 37. Niech $G \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i gwiaździstym względem 0 (a więc obszarem). Niech $\omega \in \Omega_k^{(0)}(G)$ i $k \geq 1$. Definiujemy $H\omega \in \Omega_{k-1}(G)$ wzorem

$$H\omega(x; v_2, \dots, v_k) = \int_0^1 t^{k-1} \omega(tx; x, v_2, \dots, v_k) dt$$

dla $x \in G$ i $v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. $(k-1)$ -liniowość ze względu na $v_2, \dots, v_k$ oraz antysymetrię widać, zatem $H\omega(x) \in \mathcal{A}_{k-1}(\mathbb{R}^n)$.

Odwzorowanie $H : \Omega_k^{(0)}(G) \rightarrow \Omega_{k-1}(G)$ nazywamy operatorem Poincarégo.

Uwaga. Ustalmy $\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ (niekoniecznie w postaci kanonicznej). Mamy

$$\begin{aligned} H\omega(x; v_2, \dots, v_k) &= \int_0^1 t^{k-1} f(tx) (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})(x, v_2, \dots, v_k) dt = \\ &= \int_0^1 t^{k-1} f(tx) \det \begin{bmatrix} x_{i_1} & v_{2,i_1} & \dots & v_{k,i_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i_k} & v_{2,i_k} & \dots & v_{k,i_k} \end{bmatrix} dt = \\ &= \int_0^1 t^{k-1} f(tx) \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} x_{i_j} \left(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \right) (v_2, \dots, v_k) dt. \end{aligned}$$

Zatem

$$H\omega(x) = \left(\int_0^1 t^{k-1} f(tx) dt \right) \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} x_{i_j} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Twierdzenie 16. Niech $G \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie obszarem gwiazdzistym względem 0, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_+$, $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Niech $\omega \in \Omega_k^{(p)}(G)$. Wtedy $H\omega \in \Omega_{k-1}^{(p)}(G)$ a $H : \Omega_k^{(p)}(G) \rightarrow \Omega_{k-1}^{(p)}(G)$ jest liniowe.

Dowód. Dla $k > n$ nie ma czego dowodzić. Dla $1 \leq k \leq n$ rozpisujemy $\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(k,n)} \omega_\lambda dx_\lambda$. Wystarczy sprawdzić klasę pojedynczego $H(\omega_\lambda dx_\lambda)$ (liniowość H jest oczywista). Z postaci takiej formy wynika, że wystarczy sprawdzić klasę funkcji $G \ni x \rightarrow \int_0^1 t^{k-1} \omega_\lambda(tx) dt \in \mathbb{R}$, a ona wynika z lematu o różniczkowaniu pod znakiem całki. $\square$

Twierdzenie 17 (Poincaré). Niech $G \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie obszarem gwiazdzistym względem 0, $\omega \in \Omega_k^{(1)}(G)$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. Dla $k \geq 1$ zachodzi $H(d\omega) + d(H\omega) = \omega$. Natomiast dla $k = 0$ mamy $H(d\omega) + \omega(0) = \omega$.

Dowód. Dla $k > n$ po obu stronach równania mamy 0. Dla $1 \leq k \leq n$ jest $\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(k,n)} \omega_\lambda dx_\lambda$. Z liniowości H bez straty ogólności $\omega = f dx_\lambda$ dla pewnego $\lambda \in \Lambda(k,n)$. Oznaczając $d^i x_\lambda = dx_{\lambda(1)} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{\lambda(i)}} \wedge \dots \wedge dx_{\lambda(k)}$ mamy

$$\begin{aligned} d(H(f dx_\lambda))(x) &= d \left(\sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} x_{\lambda(i)} \left(\int_0^1 t^{k-1} f(tx) dt \right) d^i x_\lambda \right) = \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} f(tx) dt \right) dx_{\lambda(i)} \wedge d^i x_\lambda + \\ &+ \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} x_{\lambda(i)} \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) t dt \right) dx_j \wedge d^i x_\lambda \\ &= k \left(\int_0^1 t^{k-1} f(tx) dt \right) dx_\lambda + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (-1)^{i-1} x_{\lambda(i)} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) dt \right) dx_j \wedge d^i x_\lambda. \end{aligned}$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} H(d(f dx_\lambda))(x) &= \sum_{j=1}^n H \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_\lambda \right) (x) = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) dt \right) (-1)^0 x_j dx_\lambda + \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) dt \right) \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1-1} x_{\lambda(i)} dx_j \wedge d^i x_\lambda = \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) dt \right) dx_\lambda + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (-1)^i x_{\lambda(i)} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) dt \right) dx_j \wedge d^i x_\lambda. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} (d(H\omega) + H(d\omega))(x) &= k \left(\int_0^1 t^{k-1} f(tx) dt \right) dx_\lambda + \sum_{j=1}^n x_j \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) dt \right) dx_\lambda = \\ &= \left(\int_0^1 \left(kt^{k-1} f(tx) + t^k \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) x_j \right) dt \right) dx_\lambda = \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} (t^k f(tx)) dt \right) dx_\lambda = \\ &= (1^k f(1x) - 0) dx_\lambda = f dx_\lambda = \omega. \end{aligned}$$

Dla $k = 0$ mamy funkcję $\omega : G \rightarrow \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^1$. Rozpisujemy

$$H(d\omega)(x) = \sum_{j=1}^n x_j \int_0^1 \frac{\partial \omega}{\partial x_j}(tx) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} (\omega(tx)) dt = \omega(x) - \omega(0).$$

□

Twierdzenie 18. Niech $G \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie obszarem gwiaździstym względem 0 , $\omega \in \Omega_k^{(p)}(G)$ dla $k \geq 1$ i $p \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$. Załóżmy, że ω jest zamknięta. Wtedy ω jest dokładna, a nawet istnieje $\alpha \in \Omega_{k-1}^{(p)}(G)$ takie, że $d\alpha = \omega$.

Dowód. Mamy $d\omega = 0$, więc z twierdzenia Poincarégo mamy $d(H\omega) = \omega$ i wystarczy przyjąć $\alpha = H\omega$. □

Lemat 2. Niech $\varphi : D \rightarrow G$ będzie $\mathcal{C}^2$ -dyfeomorfizmem pomiędzy obszarami $D, G \in \mathbb{R}^n$. Niech $k \geq 1$. Każda zamknięta k -forma w D jest dokładna wtedy i tylko wtedy, gdy każda zamknięta k -forma w G jest dokładna.

Dowód. Ze względu na symetrię wypowiedzi wystarczy pokazać wynikanie w prawo. Ustalmy k -formę zamkniętą ω w G . Wtedy $\varphi^*\omega$ jest k -formą zamkniętą w D , bo $d(\varphi^*\omega) = \varphi^*d\omega = 0$. Zatem istnieje taka $(k-1)$ -forma α , że $d\alpha = \varphi^*\omega$. Połóżmy $\beta = (\varphi^{-1})^*\alpha$. Jest to $(k-1)$ -forma w G . Mamy $d\beta = d((\varphi^{-1})^*\alpha) = (\varphi^{-1})^*d\alpha = (\varphi^{-1})^*(\varphi^*\omega) = \omega$. □

Twierdzenie 19. Niech $D \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie obszarem $\mathcal{C}^2$ -dyfeomorficznym z obszarem gwiaździstym (względem jakiegoś swojego punktu). Niech $k \geq 1$. Wtedy każda zamknięta k -forma w D jest dokładna.

Dowód. Niech $\tilde{\varphi} : D \rightarrow \tilde{G}$ będzie $\mathcal{C}^2$ -dyfeomorfizmem na obszar $\tilde{G}$ gwiaździsty względem $a \in \tilde{G}$. Niech $\tau : \tilde{G} \ni x \rightarrow x - a \in G := \tilde{G} - a$. Wtedy $\varphi = \tau \circ \tilde{\varphi}$ jest $\mathcal{C}^2$ -dyfeomorfizmem na obszar gwiaździsty względem 0 , co kończy dowód. □

Uwaga. Dla $n \leq 2$ mamy pełną charakteryzację obszarów $\mathcal{C}^2$ -dyfeomorficznych z obszarem gwiaździstym. Są to obszary jednospójne.