Definicja. Dla grafu H i liczby naturalnej n definiujemy $\text{ex}(n, H)$ jako największą taką liczbę, że n-wierzchołkowy graf o tylu krawędziach nie zawiera H jako podgrafu. Graf G nazywamy ekstremalnym dla (n, H), jeśli $|V(G)| = n$, $|E(G)| = \text{ex}(n, H)$ oraz $H \nsubseteq G$.

Definicja. Dla $n \in \mathbb{N}_1, r \in \mathbb{N}_2$ graf Turána $T(n, r-1)$ to n-wierzchołkowy, pełny graf $(r-1)$-dzielny, w którym wszystkie części podziału mają tyle samo wierzchołków (na ile to możliwe – możliwe rozmiary części podziału to dwie liczby różniące się o 1). Dla $n \leq r-1$ graf Turána to po prostu klika. Definiujemy $t(n, r-1) = |E(T(n, r-1))|$.

Twierdzenie (Turán, 1941; indukcyjnie)**.** Dla każdego $n \in \mathbb{N}_1, r \in \mathbb{N}_2$ graf $T(n, r-1)$ jest jedynym grafem ekstremalnym dla (n, K_r).

Dowód. Przeprowadzimy indukcję po n. Niech G będzie grafem ekstremalnym dla (n, K_r). Dla $n \leq r-1$ taki graf to klika, czyli baza działa. Dalej rozważamy $n \geq r$. G jest maksymalny krawędziowo, więc $K_{r-1} \subset G$, bo inaczej można by dodawać krawędzie i zanim pojawiłoby się K_r, pojawiłoby się K_{r-1}. Niech K będzie pewną $(r-1)$-kliką w G i niech $G' = G - V(K)$. Z założenia indukcyjnego G' ma co najwyżej $t(n-r+1, r-1)$ krawędzi (bo nie ma K_r). Jednocześnie każdy wierzchołek w G' ma co najwyżej $r-2$ sąsiadów w K, bo gdyby jakiś miał więcej, to wraz z K stworzyłby r-klikę. Zatem mamy $|E(G)| \leq t(n-r+1, r-1) + (n-r+1)(r-2) + \binom{r-1}{2} = t(n, r-1)$, gdzie ostatnia równość wynika z tego, że można wziąć $T(n-r+1, r-1)$ i do każdej z jego składowych dołożyć wierzchołek, a potem połączyć każdy niedołożony wierzchołek ze wszystkimi dołożonymi z innych składowych i na koniec połączyć wszystkie dołożone wierzchołki. G jest ekstremalny, więc musi być $|E(G)| = t(n, r-1)$, bo graf Turána jest przykładem, że da się osiągnąć taką liczbę.

Niech $\{x_1, \ldots, x_{r-1}\}$ będą wierzchołkami K. W rodzinie $\{V_i\}_{i \in [r-1]}$ niech $V_i = \{v \in V(G) : vx_i \notin E(G)\}$. W udowodnionej w poprzednim paragrafie nierówności zachodzi równość, więc każdy wierzchołek G' ma dokładnie $r-2$ sąsiadów w K, czyli jednego niesąsiada. Zatem $\{V_i\}_{i \in [r-1]}$ jest podziałem wierzchołków G (zauważmy, że $x_i \in V_i$). Wszystkie elementy V_i są połączone ze wszystkimi wierzchołkami K poza x_i, a więc gdyby dwa wierzchołki z V_i były ze sobą połączone, to wraz z $K - x_i$ dają r-klikę – sprzeczność, więc każdy V_i jest zbiorem niezależnym (bez krawędzi między wierzchołkami). Zatem rodzina $\{V_i\}_{i \in [r-1]}$ świadczy o tym, że G jest $(r-1)$-dzielny. Jest pełny, bo inaczej można dodać więcej krawędzi, a rozmiary zbiorów niezależnych są takie same, bo to maksymalizuje liczbę krawędzi (łatwo pokazać, że przybliżanie do siebie rozmiarów zbiorów zwiększa liczbę krawędzi pomiędzy). ∎

Twierdzenie (Turán, 1941; duplikowanie wierzchołków)**.** Dla każdego $n \in \mathbb{N}_1, r \in \mathbb{N}_2$ graf $T(n, r-1)$ jest jedynym grafem ekstremalnym dla (n, K_r).

Dowód. Niech G będzie grafem ekstremalnym dla (n, K_r). Zauważmy, że wystarczy pokazać, że G jest multidzielny (k-dzielny i pełny dla pewnego k), bo wtedy będzie $k \leq r-1$, bo inaczej można wziąć po wierzchołku z każdego zbioru niezależnego i stworzyć klikę, a równość będzie osiągnięta rozdzielając zbiory niezależne i dodając krawędzie między nimi (w ten sposób zwiększając liczbę krawędzi). Mając graf $(r-1)$-dzielny widzimy, że musi mieć zbiory niezależne równej wielkości, by zmaksymalizować liczbę krawędzi.

Załóżmy nie wprost, że G nie jest multidzielny. Wtedy będą istniały wierzchołki x, y_1, y_2 takie, że $xy_1, xy_2 \notin E(G)$ oraz $y_1y_2 \in E(G)$ (w grafie multidzielnym nie bycie przyległym jest relacją równoważności, której klasami są elementy podziału na zbiory niezależne). Jeśli $\deg_G(y_1) > \deg_G(x)$, to można usunąć x i zduplikować y_1 (dodać nowy wierzchołek o tych samych sąsiadach). Tak powstały graf G' ma więcej krawędzi niż G (dodaliśmy więcej niż usunęliśmy) i dalej nie ma r-kliki jako podgrafu, bo gdyby miał, to zawierającą kopię y_1 i nie y_1 (bo one nie sąsiadują), więc można zamienić kopię y_1 na właściwe y_1 i otrzymać K_r w G – sprzeczność. Podobnie postępujemy, gdy $\deg_G(y_2) > \deg_G(x)$. Dalej zakładamy, że $\deg_G(y_1) \leq \deg_G(x)$ oraz $\deg_G(y_2) \leq \deg_G(x)$. Teraz usuwamy y_1 oraz y_2 i duplikujemy x dwa razy. Otrzymany graf G' ma więcej krawędzi niż G (usunęliśmy $\deg_G(y_1) + \deg_G(y_2) - 1$, bo istnieje krawędź y_1y_2). Ponownie K_r nie jest podgrafem G', bo taka klika może używać co najwyżej jednego ze zduplikowanych wierzchołków, można zamienić ze zwykłym x i dostać klikę w G. Wykazaliśmy sprzeczność z tym, że G nie jest multidzielny, a więc jest i kończymy dowód. ∎

Twierdzenie (Erdős-Stone, 1946)**.** Dla każdego $r \in \mathbb{N}_2, s \in \mathbb{N}_1$ i dla każdego rzeczywistego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że dla każdego $n > n_0$ jeśli w n-wierzchołkowym grafie G zachodzi $|E)G| \geq t(n, r-1) + \varepsilon n^2$, to

$K_r^s \subset G$, gdzie K_r^s jest grafem składającym się z r zbiorów niezależnych mocy s, pomiędzy którymi wszystkie wierzchołki są połączone.

Twierdzenie. Dla każdego grafu H o co najmniej jednej krawędzi zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{ex}(n,H)}{\binom{n}{2}} = \frac{\chi(H)-2}{\chi(H)-1}.$$

Dowód. Ustalmy graf H i niech $r = \chi(H)$. H nie jest $(r-1)$-dzielny, a więc $H \not\subseteq T(n,r-1)$ (bo każdy jego podgraf można podzielić na te same składowe, co cały graf) i $t(n,r-1) \le \mathrm{ex}(n,H)$. Jednocześnie $H \subseteq K_r^s$ dla odpowiednio dużego s (każdy z r kolorów jest zbiorem niezależnym, wybieramy sobie kolorowanie i odpowiednie krawędzie między zbiorami niezależnymi z K_r^s). Z twierdzenia Erdősa-Stone'a dla każdego ε istnieje na tyle duże n, że $\mathrm{ex}(n,H) \le \mathrm{ex}(n,K_r^s) \le t(n,r-1)+\varepsilon n^2$. Zatem mamy nierówność

$$\frac{t(n,r-1)}{\binom{n}{2}} \le \frac{\mathrm{ex}(n,H)}{\binom{n}{2}} \le \frac{t(n,r-1)+\varepsilon n^2}{\binom{n}{2}}.$$

Zauważmy teraz, że $t(n,r-1) \approx \frac{1}{2}n^2\frac{r-2}{r-1}$ (z każdego z n wierzchołków wychodzą krawędzie do $r-2$ grup, każda po około $\frac{n}{r-1}$ wierzchołków), a więc $\lim_{n\to\infty} \frac{t(n,r-1)}{\binom{n}{2}} = \frac{r-2}{r-1}$. Po skorzystaniu z twierdzenia o trzech ciągach mamy więc

$$\frac{\mathrm{ex}(n,H)}{\binom{n}{2}} = \frac{\chi(H)-2}{\chi(H)-1}.$$

■

Twierdzenie. Niech G będzie grafem. Dla każdego $r \in \mathbb{N}_1$ jeśli $d(G) \ge 2^{r-2}$, to $K_r \le G$.

Dowód. Przeprowadzimy indukcję po r. Przypadki $r = 1, 2$ to graf z jednym wierzchołkiem i graf z jedną krawędzią i działają. Rozważmy $r \ge 3$ i niech $H \le G$ będzie minimalnym minorem G takim, że $d(H) \ge 2^{r-2}$, czyli każdy właściwy minor $T < H$ ma $d(T) < 2^{r-2}$. H jest niepusty, z minimalności nie ma wierzchołków izolowanych. Niech $x \in V(H)$. Dla każdego $y \in N_H(x)$ wspólnych sąsiadów x i y jest co najmniej 2^{r-3}, bo inaczej można skontraktować krawędź xy i stworzyć mniejszy minor o $d(H/xy) = \frac{2|E(H/xy)|}{|V(H/xy)|} \ge \frac{2|E(H)|-2^{r-2}}{|V(H)|-1} \ge d(H)$. Zatem $\delta(H[N_H(x)]) \ge 2^{r-3}$ i z indukcji $K_{r-1} \le H$. Dołączając x do tej kliki mamy $K_r \le G$, co kończy dowód. ■

Definicja. Talią grafu G, oznaczaną $\mathrm{girth}(G)$, nazywamy długość najmniejszego cyklu w G.

Twierdzenie (Thomassen, 1983)**.** Istnieje funkcja f taka, że dla każdego grafu G i $r \in \mathbb{N}_1$ jeśli $\delta(G) \ge 3$ i $\mathrm{girth}(G) \ge f(r)$, to $K_r \le G$.

Dowód. Załóżmy, że G jest spójny, bo minor będący kliką i tak zawsze jest zawarty w jednej składowej. Niech $d, k \in \mathbb{N}$ i $d \ge 3$. Pokażemy, że jeśli $\delta(G) \ge d$ oraz $\mathrm{girth}(G) \ge 8k+3$, to G ma minor H o $\delta(H) \ge d(d-1)^k$. Niech $X \subseteq V(G)$ będzie maksymalnym zbiorem takim, że $\forall_{\substack{x,x'\in X\\ x\ne x'}} \mathrm{dist}(x,x') > 2k$, czyli odległość między tymi punktami jest większa niż $2k$. Puszczamy BFSa ze wszystkich wierzchołków X jednocześnie. Dostajemy rodzinę drzew ukorzenionych w wierzchołkach X o minimalnej głębokości k (bo dopiero po tej odległości różne drzewa mogą zacząć się spotykać) i maksymalnej $2k$ (inaczej bardziej odległe wierzchołki powinny być w X). Zauważmy, że grafy indukowane na tych drzewach są drzewami, bo inaczej powstałby cykl na co najwyżej $4k+1$ krawędziach.

Każde dwa z tych drzew łączy co najwyżej jedna krawędź, bo inaczej powstałby cykl długości co najwyżej $8k+2$ (krawędzie pomiędzy, po $2k$ na dojście do korzenia i z powrotem). Zauważmy, że każde z tych drzew na poziomie k ma $d(d-1)^{k-1}$ wierzchołków (korzeń ma co najmniej d dzieci, każdy kolejny co najmniej $d-1$, żaden sąsiad nie zostaje zablokowany przez innej drzewa, bo jeszcze nie mogą się spotkać). Każdy z tych wierzchołków ma swoje poddrzewo, z którego liści (przynajmniej jednego liścia) wychodzą krawędzie do pozostałych drzew i jest ich co najmniej $d-1$. Każda z tych krawędzi idzie do innego drzewa, a więc biorąc drzewa BFS jako branch-sety dostajemy minor H o minimalnym stopniu co najmniej $d(d-1)^k$.

Niech $f(r) = 8(r - 2 - \log 3) + 3$. Z poprzednich dwóch paragrafów mamy, że H ma minimalny stopień co najmniej $3 \cdot 2^{r-2-\log 3} = 2^{r-2}$, a więc $K_r \leq H \leq G$. ■