Twierdzenie (Helly)**.** Niech T będzie drzewem a $\mathcal{T}$ dowolną rodziną jego poddrzew. Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_1$ rodzina $\mathcal{T}$ zawiera k rozłącznych wierzchołkowo drzew albo istnieje zbiór co najwyżej $k-1$ wierzchołków T przecinający niepusto każde drzewo w $\mathcal{T}$.

Dowód. Ukorzeniamy drzewo T i wybieramy drzewo z $\mathcal{T}$ z najniżej położonym korzeniem. Wybieramy ten korzeń i pozbywamy się wszystkich drzew, do których on należał. Kontynuujemy – jeśli wybierzemy k wierzchołków, to drzewa w nich ukorzenione były rozłączne (bo wybieraliśmy najniższe korzenie), a jeśli wcześniej skończą się nam drzewa, to mamy zbiór co najwyżej $k-1$ wierzchołków, z którym każde drzewo tnie się niepusto. ∎

Twierdzenie. Niech $n \in \mathbb{N}_1$ i niech $A_1, \ldots, A_n$ będą parami różnymi podzbiorami $[n]$. Istnieje $x \in [n]$ takie, że $A_1 \setminus \{x\}, \ldots, A_n \setminus \{x\}$ są parami różne.

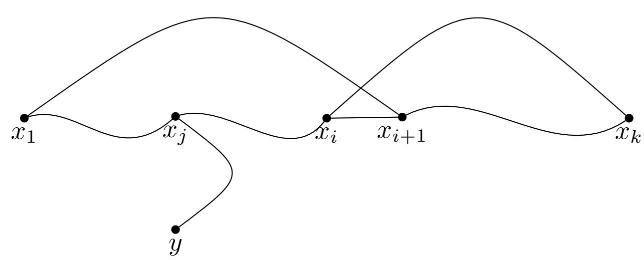
Dowód. Robimy graf na tych zbiorach, krawędź, jeśli różnią się jednym elementem. Zakładamy nie wprost, że teza jest fałszywa, czyli ten graf ma n krawędzi. Jest co najmniej tyle krawędzi, co wierzchołków, więc jest cykl (dowód indukcyjny: jak istnieje wierzchołek stopnia 1, to go usuwamy i indukcyjnie, jak wszystkie mają większy, to można iść zaczynając z dowolnego, w końcu się zapętlimy). Cykl daje sprzeczność, bo znaczy, że są dwa zbiory, które różni pewien element x, ale można uzyskać jeden z drugiego dodając i usuwając elementy inne niż x. ∎

Twierdzenie. Dowolne dwie najdłuższe ścieżki w spójnym grafie G mają niepuste przecięcie.

Dowód. Gdyby były niepołączone, to ze spójności istnieje między nimi ścieżka. Bierzemy tą ścieżkę i na każdym jej końcu dokładamy dłuższą połowę każdej z najdłuższych ścieżek. Daje nam to ścieżkę dłuższą od najdłuższej – sprzeczność. ∎

Twierdzenie. Każdy spójny graf G zawiera ścieżkę długości co najmniej $\min\{2\delta(G), |V(G)|-1\}$.

Dowód. Załóżmy, że dla najdłuższej ścieżki $x_1 x_2 \ldots x_k$ zachodzi $k < \min\{2\delta(G), |V(G)|-1\}$. Wszyscy sąsiedzi x_1, x_k na niej leżą (inaczej można wydłużyć). $k < 2\delta(G)$, więc z co najmniej $\delta(G)$ sąsiadów x_1 i co najmniej $\delta(G)$ takich x_{i+1}, że x_i jest sąsiadem x_k jeden się powtarza i jest sytuacja jak na rysunku. $k < |V(G)| - 1$, więc istnieje wierzchołek y nieleżący na ścieżce, który ze spójności G jest z nią połączony w pewnym wierzchołku x_j. Ścieżka $y \ldots x_j \ldots x_i x_k \ldots x_{i+1} x_1 \ldots x_{j-1}$ (lub analogiczna , jeśli x_j leży za x_{i+1}) jest dłuższa niż najdłuższa ścieżka – sprzeczność.

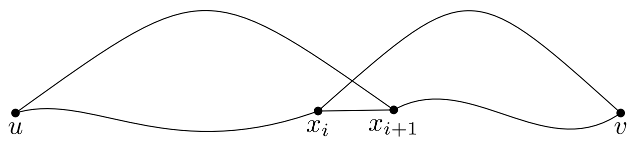


∎

Twierdzenie (Bondy-Chvátal; 1976)**.** Niech u, v będzie parą niesąsiadujących wierzchołków w G, spełniającą nierówność $\deg(u) + \deg(v) \geq n$. Wtedy zachodzi:

$$\text{Graf } G \text{ jest hamiltonowski} \iff \text{Graf } G + uv \text{ jest hamiltonowski.}$$

Dowód. Strona ($\implies$) jest oczywista – w większym grafie istnieje ten sam cykl Hamiltona. Dla dowodu ($\impliedby$) bierzemy cykl Hamiltona i zakładamy, że uv do niego należy (inaczej cykl istnieje też w mniejszym grafie). Na ścieżce $u \rightsquigarrow v$ musi istnieć sytuacja jak na rysunku, bo sąsiadów u i wierzchołków poprzedzających sąsiada v jest na niej więcej niż wierzchołków w grafie. Mamy cykl Hamiltona $u \dots x_i v \dots x_{i+1} u$.



∎

Twierdzenie (Pósa; 1962)**.** Niech G będzie grafem o $n \in \mathbb{N}_3$ wierzchołkach i niech $d_1 \leq \ldots \leq d_n$ będzie ciągiem stopni G. Jeśli dla każdego i takiego, że $1 \leq i < \frac{n}{2}$ mamy $d_i \geq i + 1$, to G ma cykl Hamiltona.

Dowód. Z twierdzenia Bondy'ego-Chvátala możemy dodać wszystkie krawędzie między wierzchołkami o indeksach $i \geq \frac{n}{2}$ nie zmieniając hamiltonowskości grafu. Następnie działamy indukcyjnie: jeśli w grafie są wszystkie krawędzie między wierzchołkami $v_{j+1}, \ldots, v_n$, to każdy z nich na stopień co najmniej $n - j - 1$, a że $d_j \geq j + 1$, to można dodać wszystkie krawędzie między v_j a dalszymi wierzchołkami. W ten sposób otrzymujemy klikę, a ona ma cykl Hamiltona, więc w oryginalnym grafie też był cykl Hamiltona. ∎

Twierdzenie. Każdy graf G ma podgraf dwudzielny H taki, że $|E(H)| \geq \frac{1}{2}|E(G)|$.

Dowód. Bierzemy dowolny graf dwudzielny $H \subseteq G$ z $V(H) = V(G)$. Jeśli $\deg_H(v) < \frac{1}{2}\deg_G(v)$, to przesuwamy go do drugiej grupy wierzchołków. Proces się zatrzyma, bo stopnie wierzchołków w H rosną. Ostatecznie $\forall_{v \in V(H)}\ \deg_H(v) \geq \frac{1}{2}\deg_G(v)$, a więc $|E(H)| \geq \frac{1}{2}|E(G)|$. ∎

Twierdzenie. Każdy zawierający jakąś krawędź graf G ma podgraf H taki, że $2\delta(H) > d(H) \geq d(G)$.

Dowód. Zaczynamy od $H_0 = G$ i konstrukcja indukcyjna. Jeśli $2\delta(H_i) \leq d(H_i)$, to usuwamy wierzchołek o minimalnym stopniu, tworząc H_{i+1}. Wtedy $d(H_{i+1}) \geq d(H_i)$. Pod koniec procesu graf H niepusty, bo $d(\emptyset) = 0 < d(G)$, zatem nie ma już wierzchołków do usuwania i $2\delta(H) > d(H) \geq d(G)$. ∎

Twierdzenie. Każdy graf G z $d(G) \geq 4k$ ma podgraf dwudzielny H taki, że $\delta(H) \geq k$.

Dowód. W grafie o $d(G) \geq 4k$ istnieje podgraf D taki, że $2\delta(D) \geq 4k$, a z $\delta(D) \geq 2k$ istnieje jego podgraf dwudzielny H z co najmniej połową jego krawędzi, czyli $\delta(H) \geq k$. ∎