Twierdzenie. Rodziny $\binom{[n]}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ i $\binom{[n]}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ to jedyne antyłańcuchy w $\mathcal{B}_n$ świadczące jego szerokości.

Dowód. Rozważmy największy antyłańcuch $\mathcal{A}$. Jeśli zawiera jakieś elementy z innych poziomów niż $\binom{[n]}{n/2}$, to bierzemy najbardziej oddalony od środka (w górę lub w dół) poziom i zastępujemy go jego cieniem (górnym lub dolnym), który będzie większy niż zastępowany zbiór. Rodzina pozostanie antyłańcuchem, bo jeśli jakiś element cienia jest porównywalny z czymś w nowej rodzinie, to zastąpiony element byłby z tym porównywalny w oryginalnym antyłańcuchu. Wystarczy więc rozważyć tylko $\mathcal{A}$ zawierające elementy ze środkowych poziomów.

Jeśli $2 \mid n$, to jest tylko jeden taki poziom i koniec, inaczej rozważamy środkowe poziomy k i $k+1$, niech $\mathcal{A}$ nie będzie pełnym poziomem, czyli są takie $A, B \in \binom{[n]}{k+1}$, że $A \in \mathcal{A}$ i $B \notin \mathcal{A}$. Numerujemy elementy $A \cup B$: najpierw idą elementy, które są w $A \setminus B$ (w dowolnej kolejności), potem te z $A \cap B$, na koniec te z $B \setminus A$, czyli mamy $A = \{x_0, \ldots, x_k\}$ i $B = \{x_i, \ldots, x_{k+i}\}$ dla pewnego i. Istnieje $j < i$ takie, że $P = \{x_j, \ldots, x_{k+j}\} \in \mathcal{A}$ i $Q = \{x_{j+1}, \ldots, x_{k+j+1}\} \notin \mathcal{A}$ (zaczynamy od A i przesuwamy się po elementach, w końcu trafimy na zbiór nie w $\mathcal{A}$ – może to być B albo coś wcześniej). Łańcuch maksymalny $\mathcal{C}$ zawierający $P \cap Q$ i Q nie ma w sobie elementu $\mathcal{A}$ (na obu poziomach środkowych wybraliśmy coś, co nie jest w $\mathcal{A}$), więc nierówność LYM jest ostra i $\mathcal{A}$ nie ma potrzebnej wielkości - sprzeczność. ■

Twierdzenie. Jeśli $\mathcal{F}$ jest rodziną podzbiorów $[n]$ taką, że nie istnieją $A, B, C \in \mathcal{F} : A \subsetneq B \subsetneq C$, to zachodzi

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}.$$

Dowód. Dla nieparzystego n twierdzenie dualne do Dilwortha mówi, że można podzielić $\mathcal{F}$ na 2 antyłańcuchy, a więc rozmiar $\mathcal{F}$ jest nie większy niż dwa największe antyłańcuchy. Dla $n = 2k$ powtarzając dowód nierówności LYM dostajemy $\sum_{A \in \mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 2$, biorąc największe możliwe $\mathcal{F}$ wiemy, że $\mathcal{F} \geq \binom{n}{k}$ (wystarczy wziąć maksymalny antyłańcuch) oraz $\mathcal{F}$ nie może mieć więcej niż $\binom{n}{k}$ elementów wielkości k, czyli $\sum_{A \in \mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \geq \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{\binom{n}{k}} + \left(|\mathcal{F}| - \binom{n}{k}\right) \frac{1}{\binom{n}{k+1}}$, co z poprzednią nierównością kończy dowód. ■

Twierdzenie. Najmniejsza rozróżniająca rodzina $\mathcal{F}$ podzbiorów $[n]$ ma $\lceil \log_2 n \rceil$ elementów.

Dowód. Funkcja $f : [n] \ni x \to \{F \in \mathcal{F} : x \in F\} \in 2^{\mathcal{F}}$ jest injekcją, więc $n \leq 2^{|\mathcal{F}|}$ i $|\mathcal{F}| \geq \lceil \log_2 n \rceil$. Konstrukcja: $F_1 = \{1, \ldots, \frac{n}{2}\}$ rozróżnia połowy między sobą, $F_2 = \{1, \ldots \frac{n}{4}\} \cup \{\frac{n}{2} + 1, \ldots, \frac{3}{4}n\}$ ćwiartki i tak dalej. ■

Twierdzenie. Niech $s, r, n \in \mathbb{N}_1$ oraz $s < r < n$ i niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną podzbiorów r-elementowych $[n]$ taką, że dla dowolnych $A \neq B \in \mathcal{F}$ jest $|A \cap B| \leq s$. Zachodzi

$$|\mathcal{F}| \leq \frac{\binom{n}{s+1}}{\binom{r}{s+1}}.$$

Dowód. Zauważamy, że żadne dwa elementy $\mathcal{F}$ nie posiadają takich samych podzbiorów rozmiaru $s + 1$ (inaczej przecięcie byłoby za duże), więc $|\mathcal{F}| \cdot \binom{r}{s+1} \leq \binom{n}{s+1}$. ■