Twierdzenie. Dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że każde N punktów na płaszczyźnie zawiera n punktów w pozycji ogólnej lub n punktów leżących na jednej prostej.

Dowód. Bierzemy $N \geq R^{(3)}(n, n)$, kolory: trójka współliniowa lub nie. ∎

Twierdzenie (Erdős-Szekeres)**.** Niech $n \in \mathbb{N}_1$. Dowolny zbiór $N > R^{(3)}(n, n)$ punktów na płaszczyźnie w pozycji ogólnej zawiera n punktów w pozycji wypukłej.

Dowód. Ustalamy kolejność na punktach. Każda trójka w zadanej kolejności jest zorientowana clockwise lub counterclockwise. Wielokąt zawierający tylko trójki jednej orientacji jest wypukły, a odpowiednią ich ilość daje wybór N. ∎

Twierdzenie. Dla $t \in \mathbb{N}_3$ niech $L(t)$ będzie równaniem $x_1 + \ldots + x_{t-1} = x_t$. Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_1$ i $t \in \mathbb{N}_3$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego kolorowania $c : [N] \to [k]$ istnieje monochromatyczne rozwiązanie $L(t)$.

Dowód. Bierzemy $N = R^{(2)}(k; t)$, kolorowanie $c'(\{x, y\}) = c(|x-y|)$ ma monochromatyczną klikę $\{y_1, \ldots, y_t\}$. Niech $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_t$. Kładąc $x_1 = y_2 - y_1, \ldots, x_{t-1} = y_t - y_{t-1}, x_t = y_t - y_1$ mamy to, co chcemy ∎

Twierdzenie. Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_1$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnej liczby pierwszej p takiej, że $p > N$ równanie

$$x^k + y^k = z^k \pmod p$$

ma nietrywialne rozwiązanie w liczbach całkowitych, czyli takie, że p nie dzieli $x \cdot y \cdot z$.

Dowód. Niech $p > S(k)$. Podgrupa $G_k = \{x^k \mod p : x \in \mathbb{Z}_p^*\}$ ma rząd $\frac{p-1}{\gcd(k,p-1)}$ (bierzemy kolejne potęgi generatora $\mathbb{Z}_p$), więc ma $\gcd(k, p-1) \leq k$ warstw, kolorując elementy $\mathbb{Z}_p^*$ po tym, to jakiej warstwy należą, mamy z twierdzenia Schura rozwiązanie $x + y \equiv z \pmod p$ w jednej warstwie, czyli $a_j x^k + a_j y^k \equiv a_j z^k \pmod p$, a to daje tezę. ∎

Twierdzenie. Zachodzi $S(k) = \Omega(3^k)$, gdzie $S(k)$ to liczba Schura.

Dowód. Mając kolorowanie $c : [n] \to [k]$ bez trójki Schura można zdefiniować kolorowanie $c' : [3n + 1] \to [k + 1]$:

$$c'(i) = \begin{cases} c(i), & i \in [n] \\ k+1, & i \in \{n+1, \ldots, 2n+1\} \\ c(i = 2n - 1), & i \in \{2n+1, \ldots, 3n+1\} \end{cases},$$

które też nie ma trójki Schura ($x + y = z$ możliwe tylko dla $x \in [n]$ i $y \in \{2n + 1, \ldots, 3n + 1\}$, ale wtedy analogiczna trójka będzie istnieć w c), zatem jeśli $S(k) = n+1$, to $S(k+1) \geq 3n+2 = 3S(k)-1$. Indukcyjnie pokazujemy $S(k) \geq \frac{3^k+1}{2}$. ∎