Definicja. Liczba Ramseya $R^{(p)}(k;\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_k)$, gdzie $k \geq 1, \ell_i \geq p \geq 1$ to najmniejsza taka liczba N, że dla każdego kolorowania $c : \binom{[N]}{p} \to [k]$ istnieje $X \subset [N]$ oraz $\alpha \in [k]$ takie, że $|X| = \ell_\alpha$ oraz $\binom{X}{p} \subseteq c^{-1}(\alpha)$, czyli każdy podzbiór X jest kolorowany tym samym kolorem i X spełnia ograniczenie wielkościowe dla tego koloru.

Twierdzenie (Ramsey, 1930)**.** Liczba Ramseya $R^{(p)}(k;\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_k)$ jest dobrze zdefiniowana, czyli istnieje liczba spełniająca taką własność.

Dowód. Zastosujemy indukcję po $(p,k,\sum_j \ell_j)$. Dla $p=1$ jest $R^{(1)}(k;\ell_1,\ldots,\ell_k) \leq \sum_j \ell_j$, a dla $k=1$ jest $R^{(p)}(1;\ell_1) \leq \ell_1$. Jeśli $\exists_{j\in[k]}\ \ell_j = p$, to $R^{(p)}(k;\ell_1,\ldots,\ell_k) = R^{(p)}(k-1;\ell_1,\ldots,\ell_{j-1},\ell_{j+1},\ldots,\ell_k)$, bo albo jest cokolwiek koloru j i warunek jest spełniony, albo nie ma i trzeba szukać pozostałych. Dalej zakładamy $p,k \geq 2$ oraz $\forall_{j\in[k]}\ \ell_j \geq p+1$.

Niech $L_j = R^{(p)}(k;\ell_1,\ldots,\ell_j-1,\ldots,\ell_k)$ (istnieje z indukcji). Niech $N = 1+R^{(p-1)}(k;L_1,\ldots,L_k)$. Pokażemy $R^{(p)}(K;\ell_1,\ldots,\ell_k) \leq N$. Rozważmy dowolne $c : \binom{[N]}{p} \to [k]$ i wybierzmy dowolne $v \in [N]$. Definiujemy $c' : \binom{[N]\setminus\{v\}}{p-1} \to [k]$ kładąc $c'(X) = c(X \cup \{v\})$. Z definicji N w c' istnieje monochromatyczny zbiór Y o $|Y| = L_\alpha$ dla pewnego $\alpha \in [k]$. Z definicji L_α istnieje w nim dla c monochromatyczny zbiór wielkości ℓ_j, gdzie $j \neq \alpha$ lub wielkości $\ell_\alpha - 1$ (oznaczmy go T) – wtedy rozważamy $T \cup \{v\}$, który jest rozmiaru ℓ_α i jest monochromatyczny, bo c' pokolorowało wszystkie zbiory kolorem α, więc nowe podzbiory zawierające v nic nie psują. W obu przypadkach spełniliśmy wymagania monochromatyczności, co dowodzi żądanej nierówności i kończy dowód. ∎

Twierdzenie (Erdős)**.** Zachodzi $R^{(2)}(\ell,\ell) < 4^\ell$.

Dowód. Niech $k \geq 1, \ell \geq 2$. Ustalmy $N = 2^{2\ell-1}$ i dowolne kolorowanie $c : \binom{[N]}{2} \to [2]$. Zdefiniujemy indukcyjnie ciąg $(v_i)_{i\in[2\ell]}$ taki, że dla każdego $i \in [2\ell-1]$ rodzina $\{\{v_i,v_{i+1}\},\{v_i,v_{i+1}\},\ldots,\{v_i,v_{2\ell}\}\}$ jest monochromatyczna oraz ciąg podzbiorów $[N]$ postaci $(V_i)_{i\in[2\ell]}$, gdzie $\forall_{i\in[2\ell]}\ |V_i| \geq 2^{2\ell-i}$. Ustalmy $v_1 = 1$ oraz $V_1 = [N]$. Mając zdefiniowane v_i, V_i definiujemy $R_i = \{v \in V_i \setminus \{v_i\} : c(\{v_i,v\}) = 1\}$ oraz $B_i = \{v \in V_i \setminus \{v_i\} : c(\{v_i,v\}) = 2\}$. Mamy $\max(|R_i|,|B_i|) \geq \left\lceil \frac{|R_i|+|B_i|}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2^{2\ell-i}-1}{2} \right\rceil = 2^{2\ell-i-1}$. Definiujemy V_{i+1} jako większy ze zbiorów R_i, B_i oraz v_{i+1} jako dowolny element V_{i+1}. W ten sposób ciąg $(v_i)_{i\in[2\ell]}$ będzie spełniał zadane własności, a więc będzie musiał w nim istnieć podciąg długości ℓ taki, że wszystkie jego dwuelementowe podzbiory są monochromatyczne. Ostatecznie mamy $R^{(2)}(\ell,\ell) \leq 2^{2\ell-1} < 4^\ell$. ∎

Twierdzenie (Erdős)**.** Zachodzi $R^{(2)}(\ell,\ell) > \sqrt{2}^\ell$.

Dowód. Wszystkich 2-kolorowań zbioru $\binom{[N]}{2}$ jest $2^{\binom{N}{2}}$. Kolorowanie nazwiemy złym, jeśli istnieje dla niego monochromatyczny podzbiór $[N]$ wielkości ℓ. Niech $Y \subseteq [N]$ i $|Y| = \ell$.
Zdefiniujmy $B_Y = \left\{c : \binom{[N]}{2} \to [2] : Y \text{ jest monochromatyczny na } c\right\}$. Zbiór $B = \bigcup_{Y\subseteq[N],|Y|=\ell} B_Y$ jest zbiorem wszystkich złych kolorowań. Nierówność $|B| < 2^{\binom{N}{2}}$ implikuje $R^{(2)}(\ell,\ell) > N$. Mamy $|B| \leq \sum_{Y\subseteq[N],|Y|=\ell} |B_Y| = \binom{N}{\ell} \cdot 2^{\binom{N}{2}-\binom{\ell}{2}} \cdot 2$, gdzie równość wynika z tego, że dla zadanego zbioru dowolnie wybieramy jego kolor i dowolnie kolorujemy pozostałe pary. Mamy z kolei $\binom{N}{\ell} < \frac{N^\ell}{\ell!} < \frac{N^\ell}{2^{\ell/2+1}}$. Dla $N \leq 2^{\ell/2}$ ostatnia nierówność daje nam $\binom{N}{\ell} < 2^{\binom{\ell}{2}-1}$, co dowodzi $|B| < 2^{\binom{N}{2}}$ i kończy dowód. ∎

Twierdzenie (Erdős-Szekeres)**.** Zachodzi $R^{(2)}(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$.

Dowód. Zastosujemy indukcję po $s+t$. Dla $s=t=2$ jest $R^{(2)}(2,2) = 2$. Niech $N = R^{(2)}(s-1,t)+R^{(2)}(s,t-1)$. Pokażemy, że $R(s,t) \leq N$, co indukcyjnie da tezę. Niech $c : \binom{[N]}{2} \to [2]$ i $v \in [N]$. Przez A oznaczymy zbiór tych elementów $[N]$, które w parze z v są pokolorowane kolorem 1. Analogicznie definiujemy B dla koloru 2. Mamy $|A|+|B|+1 = N$. Jeśli $|A| \geq R^{(2)}(s-1,t)$ lub $|B| \geq R^{(2)}(s,t-1)$, to istnieją odpowiednie zbiory – albo wewnątrz A lub B, albo po dodaniu do znalezionych zbiorów v. Któraś z tych nierówności musi zachodzić, bo inaczej suma ich mocy jest za mała. ∎

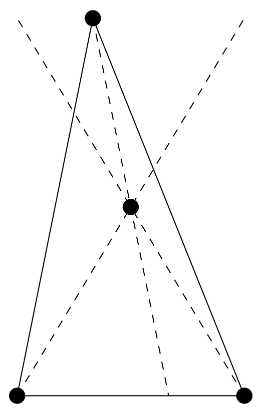
Twierdzenie (Schur)**.** Dla dowolnego $k \geq 2$ istnieje N takie, że dla każdego kolorowania $c : [N] \to [k]$ istnieją $x, y, z \in [N] : x + y = z$ oraz $c(x) = c(y) = c(z)$.

Dowód. Ustalmy $k \geq 2$ i weźmy $N = R^{(2)}(k; 3, 3, \ldots, 3)$. Dla dowolnego kolorowania $c : [N] \to [k]$ kolorowanie $c' : \binom{[N]}{2} \to [k]$ zadane przez $c'(\{x, y\}) = c(|x - y|)$ ma monochromatyczną trójkę i, j, k. Niech bez straty ogólności niech $i \leq j \leq k$. Mamy $c(j - i) = c(k - i) = c(k - j)$, więc kładąc $x = j - i$, $y = k - j$, $x = k - i$ mamy tezę. ■

Definicja. Mówimy, że zbiór punktów na płaszczyźnie jest w pozycji ogólnej, jeśli żadne trzy nie są współliniowe.

Twierdzenie (Happy Ending Problem; Esther Klein)**.** W dowolnym zbiorze 5 punktów na płaszczyźnie w pozycji ogólnej pewne 4 tworzą czworokąt wypukły.

Dowód. Jeśli otoczka wypukła tych pięciu punktów ma 5 albo 4 punkty, to teza jest oczywista. Rozważmy sytuację, gdy otoczka wypukła jest trójkątem.



Umieszczając piąty punkt w dowolnym z powstałych trójkątów otrzymujemy czworokąt wypukły powstały z punktu w środku trójkąta i odpowiednich wierzchołków trójkąta. ■

Twierdzenie (Erdős-Szekeres; przez happy ending problem)**.** Dla każdego $n \geq 1$ istnieje N takie, że dla dowolnych N punktów na płaszczyźnie w pozycji ogólnej pewne n z nich tworzy wielokąt wypukły.

Dowód. Na początek zauważmy, że jeśli dowolne 4 z n punktów w pozycji ogólnej tworzą czworokąt wypukły, to wszystkie n punktów tworzy wielokąt wypukły. Załóżmy nie wprost, że jakiś punkt leży we wnętrzu otoczki wypukłej takiego zbioru. Po striangulowaniu otoczki ten punkt leży w którymś z trójkątów. Czworokąt złożony z tego trójkąta i punktu w nim nie jest wypukły, a więc nie wszystkie czwórki są wypukłe – sprzeczność.

Niech $N = R^{(4)}(2; n, 5)$ i niech X będzie dowolny zbiorem N punktów w pozycji ogólnej. Definiujemy kolorowanie $c : \binom{X}{4} \to [2]$ zadanie przez $c(Y) = \begin{cases} 1 & Y \text{ wypukły} \\ 2 & Y \text{ wklęsły} \end{cases}$. Teraz albo mamy zbiór n punktów, gdzie każda czwórka tworzy czworokąt wypukły (a więc całość tworzy wielokąt wypukły), albo 5 punktów, gdzie każda czwórka tworzy wielokąt wklęsły – to jednak nie może zajść na mocy Happy Ending Problem. ■

Definicja. Zbiór k punktów na płaszczyźnie w pozycji ogólnej takich, że żadnym dwóm nie powtarza się żadna współrzędna nazwiemy k-kubkiem, jeśli dla każdej pary tych punktów wszystkie punkty pomiędzy nimi (to znaczy dla punktów o współrzędnych x_1, x_2 wszystkie punkty o współrzędnej $x_j : x_1 < x_j < x_2$) leżą poniżej linii prostej puszczonej przez te dwa punkty. k-kubek jest k-kątem wypukłym.

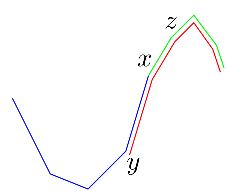
Definicja. Zbiór k punktów na płaszczyźnie w pozycji ogólnej takich, że żadnym dwóm nie powtarza się żadna współrzędna nazwiemy k-czapką, jeśli dla każdej pary tych punktów wszystkie punkty pomiędzy nimi (to znaczy dla punktów o współrzędnych x_1, x_2 wszystkie punkty o współrzędnej $x_j : x_1 < x_j < x_2$) leżą powyżej linii prostej puszczonej przez te dwa punkty. k-czapka jest k-kątem wypukłym.

Twierdzenie (Erdős-Szekeres; przez czapki i kubki)**.** Dla każdego $n \geq 1$ istnieje N takie, że dla dowolnych N punktów na płaszczyźnie w pozycji ogólnej pewne n z nich tworzy wielokąt wypukły.

Dowód. Niech X będzie zbiorem punktów na płaszczyźnie w pozycji ogólnej takich, że żadnym dwóm nie powtarza się żadna współrzędna (łatwo uzyskać ze zwykłych punktów w pozycji ogólnej – wystarczy zrotować względem dowolnego punktu, punktów jest skończenie wiele, więc zawsze się da).

Przez $f(k,l)$ oznaczmy najmniejszą liczbę M taką, że dla $|X| = M$ zbiór X musi zawierać k-kubek lub l-czapkę. Mamy $f(k,2) = f(2,l) = 2$. Niech $N = f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1$. Pokażemy, że $f(k,l) \leq N$.

Niech $|X| = N$. Jeśli w X jest l-czapka, to koniec. Zakładamy, że nie ma i rozważamy zbiór $E = \{x \in X : \text{istnieje } (k-1)\text{-kubek w } X \text{ taki, że jego najbardziej prawy punkt to } x\}$. Mamy $|E| \geq f(k,l-1)$, bo możemy dodawać kolejne znalezione krańce kubków do E i dalej rozważać zbiór X bez nich – dopóki ma odpowiednią wielkość, znajdziemy $(k-1)$-kubek. Jeśli E zawiera k-kubek, to kończymy dowód. Inaczej zawiera $(l-1)$-czapkę. Istnieje więc punkt $x \in E$, który jest lewym końcem pewnej czapki i jednocześnie (z definicji E) jest prawym końcem pewnego kubka. Niech y będzie punktem kubka sąsiadującym z x, a z punktem czapki sąsiadującym z x. Rozważmy prostą yz – x może leżeć pod nią lub nad nią. Jeśli leży pod nią, to można rozszerzyć $(k-1)$-kubek o punkt z, a w przeciwnym wypadku można rozszerzyć $(l-1)$-czapkę o punkt y (jak na rysunku).



■

Definicja. d-wymiarową kostką o boku m nazywamy zbiór $[m]^d = \{(x_1, \ldots, x_d) : \forall_i \; x_i \in [m]\}$.

Definicja. $L \subset [m]^d$ nazywamy linią kombinatoryczną, jeśli istnieje zbiór $I \subset [d]$ oraz $\{y_i\}_{i \in [d] \setminus I}$ takie, że L jest postaci $\{(x_1^\alpha, \ldots, x_d^\alpha) : \alpha \in [m]\}$, gdzie

$$x_i^\alpha = \begin{cases} \alpha & i \in I \\ y_i & i \in [d] \setminus I \end{cases},$$

czyli istnieje zbiór wymiarów, na których współrzędne rosną od 1 do m, a na pozostałych są ustalone. Zbiór I nazywamy aktywnym zbiorem.

Twierdzenie (Hales-Jewett)**.** Dla każdego $m, k \geq 1$ istnieje liczba $N = \mathrm{HJ}(k,m)$ taka, że dla każdego kolorowania $c : [m]^N \to [k]$ istnieje monochromatyczna linia kombinatoryczna.

Dowód. Dla linii kombinatorycznej L niech L^- i L^+ oznaczają jej pierwszy i ostatni punkt. Mówimy, że linie $L_1, \ldots, L_s$ są zogniskowane w f, jeśli $L_i^+ = f$ dla każdego $i \in [s]$. Dodatkowo mówimy, że są kolorowo zogniskowane, gdy wszystkie linie $L_i \setminus \{f\}$ są monochromatyczne i w innym kolorze. Przeprowadzimy dowód indukcyjny po m. Baza $m = 1$ jest oczywista (istnieje tylko jeden punkt kostki).

Zdefiniujmy $T = \mathrm{FHJ}(k,s,m)$ jako najmniejszą taką liczbę, że każde k-kolorowanie $[m]^T$ albo zawiera monochromatyczną linię kombinatoryczną, albo zawiera s kolorowo zogniskowanych linii. Zauważmy, że podstawienie $s = k$ daje nam naszą tezę, bo co najmniej jedna ze zogniskowanych linii ma wtedy taki sam kolor, jak punkt zogniskowania. Dowodząc istnienia tej liczby indukujemy się po s. W bazie $s = 1$ wystarczy postawić $\mathrm{FHJ}(k,1,m) = \mathrm{HJ}(k,m-1)$ (istnieje krótsza monochromatyczna linia). Niech $n = \mathrm{FHJ}(k,s-1,m)$ i $n' = \mathrm{HJ}(k^{m^n}, m-1)$. Pokażemy, że $\mathrm{FHJ}(k,s,m) \leq n + n'$.

Weźmy dowolne k-kolorowanie ϕ kostki $[m]^{n+n'}$. Można dla niego zdefiniować (k^{m^n})-kolorowanie ϕ' kostki $[m]^{n'}$ jako kolorowanie produktowe wszystkich punktów o ustalonych pierwszych n' współrzędnych w $[m]^{n+n'}$ (zatem każda kostka $[m]^n$ jest osobnym kolorem). Z definicji n' w ϕ' istnieje linia L w $[m]^{n'}$ o aktywnym zbiorze I taka, że skrócona linia $L \setminus \{L^+\}$ jest monochromatyczna. To znaczy, że dla $a \in [m]^n$ i $b, b' \in L \setminus \{L^+\}$ zachodzi $\phi((b, a)) = \phi((b', a))$. Można więc zdefiniować kolorowanie ϕ'' kostki $[m]^n$ jako $\phi''(a) = \phi((b, a))$ dla dowolnego $b \in L \setminus \{L^+\}$. Monochromatyczna linia w ϕ'' jest też monochromatyczną linią w ϕ (ten sam zbiór aktywny, w n' pierwszych wymiarach same nieaktywne leżące na L). Załóżmy więc, że w ϕ'' nie ma monochromatycznej linii. Z definicji n mamy w ϕ'' zbiór $s - 1$ kolorowo zogniskowanych linii $L_1, \ldots, L_{s-1}$ o aktywnych zbiorach $I_1, \ldots, I_{s-1}$ i ognisku f. Dla każdego i zdefiniujmy L'_i jako linię w $[m]^{n+n'}$ o pierwszym punkcie (L^-, L_i^-) i aktywnym zbiorze $I \cup I_i$, a L'_s jako linię o pierwszym punkcie (L^-, f) i aktywnym zbiorze I. O ile w ϕ nie ma monochromatycznej linii, to właśnie zdefiniowaliśmy s kolorowo zogniskowanych linii o ognisku (L^+, f), bo jeśli f był innego koloru niż wszystkie zogniskowane w nim linie, to L'_s będzie miała całkiem nowy kolor. To kończy dowód. ■

Twierdzenie (van der Waerden)**.** Dla każdego $m, k \geq 1$ istnieje N taki, że dla każdego kolorowania $c : [N] \to [k]$ istnieje monochromatyczny ciąg arytmetyczny długości m.

Dowód. Niech $n = \mathrm{HJ}(m, k)$ (najmniejsza taka liczba, że $[m]^{\mathrm{HJ}(m,k)}$ ma monochromatyczną linię kombinatoryczną w dowolnym k-kolorowaniu) oraz $N = n \cdot m$. Dla dowolnego kolorowania $c : [N] \to [k]$ definiujemy $c' : [m]^n \to [k]$ jako $c'(x_1, \ldots, x_n) = c(x_1 + \ldots + x_n)$. Z definicji n dla kolorowania c' istnieje monochromatyczna linia kombinatoryczna $\left\{(x_1^i, \ldots, x_n^i)\right\}_{i \in [m]}$ o zbiorze aktywnych współrzędnych I. Zdefiniujmy $s^i = x_1^i + \ldots + x_n^i$. Jest $s^{i+1} - s^i = |I|$ (każda współrzędna z I rośnie o 1, inne są stałe) i zbiór $\left\{s^i\right\}_{i \in [m]}$ jest monochromatyczny w c (z określenia c') – mamy zatem szukany ciąg arytmetyczny. ■