Twierdzenie. Niech $k \in \mathbb{N}_1$ i niech G będzie k-regularnym grafem dwudzielnym. Krawędzie G można podzielić na k skojarzeń doskonałych.

Dowód. Niech podział wierzchołków w grafie dwudzielnym to $\{A, B\}$. Dla $S \subseteq A$ mamy $E_A \subseteq E_{N(S)}$, bo każda krawędź z E_S jest przyległa do sąsiada czegoś z S. Mamy $|E_S| = k|S|$ i $|E_{N(S)}| = k|N(S)|$, więc $|S| \leq |N(S)|$ i z twierdzenia Halla istnieje skojarzenie nasycające A, a że $k|A| = |E| = k|B| \implies |A| = |B|$, to skojarzenie jest doskonałe. Po usunięciu go mamy graf $(k-1)$-regularny – indukcja. ∎

Twierdzenie. Niech k będzie parzystą i dodatnią liczbą naturalną, a G grafem k-regularnym. Istnieje $H \subseteq G$ taki, że $V(H) = V(G)$ i H jest sumą rozłącznych cykli.

Dowód. Spójne składowe G mają cykle Eulera, tworzymy graf G' o wierzchołkach v^-, v^+: jeśli w cyklu Eulera jest $v \to w$, to $v^+w^- \in E(G')$. Graf G' jest dwudzielny (podział na wierzchołki z plusem i minusem) i $\frac{k}{2}$-regularny (dla każdego wierzchołka połowa krawędzi jest wchodząca, a połowa wychodząca), a więc ma skojarzenie doskonałe. Po scaleniu wierzchołków v^-, v^+ (powrocie do G) to skojarzenie daje rozłączne cykle (każdy wierzchołek ma dokładnie dwie krawędzie). ∎

Twierdzenie. Niech G będzie grafem 3-regularnym bez mostów. G ma skojarzenie doskonałe.

Dowód. Weźmy $S \subseteq V(G)$ i H będące składową $G - S$ takie, że $2 \nmid |H|$. Jeśli w G jest parzyście wiele krawędzi między H a S (powiedzmy 2ℓ), to w $G[H]$ jest $\sum \deg(v) = 3|H| - 2\ell$, co jest nieparzyste. Zatem jest nieparzyście wiele krawędzi między S i H, ale nie jedna, bo nie ma mostów. Są więc co najmniej 3. Zatem wszystkich krawędzi wychodzących do S z nieparzystych składowych $G - S$ jest co najmniej $3\,\mathrm{odd}(G - S)$, ale co najwyżej $3|S|$, więc $\mathrm{odd}(G - S) \leq |S|$ i z twierdzenia Tutte'a istnieje skojarzenie doskonałe. ∎

Twierdzenie. Niech G będzie grafem i $k \in \mathbb{N}_1$. G zawiera skojarzenie liczności k wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $S \subseteq V(G)$ zachodzi $\mathrm{odd}(G - S) \leq |S| + |V(G)| - 2k$.

Dowód. Niech $d = \max\{\mathrm{odd}(G-S) - |S|\}$. Będziemy wykazywać równoważność z nierównością $2k \leq |V(G)| - d$.
($\implies$) Co najmniej jeden wierzchołek każdej z $\mathrm{odd}(G - S)$ nieparzystych składowych musi być skojarzony z czymś z S (wewnątrz jego składowej nie można zrobić par, bo jest nieparzyście wiele wierzchołków), więc d wierzchołków musi pozostać bez skojarzenia i składa się ono z co najwyżej $|V(G)| - d$ wierzchołków.
($\impliedby$) Widzimy, że $d \geq 0$ (świadczy o tym $S = \emptyset$), a d jest tej samej parzystości, co $|V(G)|$ (parzystość $\mathrm{odd}(G - S) - |S|$ nie zostanie zmieniona przez żadną z parzystych składowych). Tworzymy graf G', dodając do G zbiór D o d wierzchołkach tworzących klikę i połączonych ze wszystkim z $V(G)$. G' spełnia warunek Tutte'a: dla $S' = \emptyset$ jest $\mathrm{odd}(G' - S') = 0$, bo jest tylko jedna składowa z parzystą ilością wierzchołków ($V(G) + d$ parzyste); jak $D \subsetneq S'$, to $G' - S'$ ma jedną składową i $1 \leq |S'|$; jak $D \subset S'$, to dla $S = S' \setminus D$ jest $\mathrm{odd}(G' - S') = \mathrm{odd}(G - S) \leq |S| + d = |S'|$, gdzie nierówność wynika z definicji d. Zatem G' ma skojarzenie doskonałe, a po usunięciu z niego D dalej jest w nim $V(G) - d$ wierzchołków. ∎

Twierdzenie. G jest k-spójny wtedy i tylko wtedy, gdy pomiędzy dowolnymi dwoma wierzchołkami $x, y \in V(G)$ istnieje k wierzchołkowo rozłącznych ścieżek z x do y.

Dowód. ($\implies$) Załóżmy, że istnieje mniej ścieżek. Dla nieprzyległych x, y twierdzenie Mengera odpalone na ich sąsiedztwach daje, że wielkość minimalnego separatora jest równa ilości rozłącznych ścieżek, więc musi istnieć krawędź xy (inaczej istnieje separator mniejszy niż k). Rozważmy graf $G' = G - xy$. Istnieje w nim co najwyżej $k-2$ rozdzielnych ścieżek $x \rightsquigarrow y$ (w G było ich co najwyżej $k-1$), zatem z twierdzenia Mengera istnieje separator $X : |X| = k-2$, a że $|G'| > k$, to istnieje wierzchołek $w \notin X \cup \{x, y\}$. X rozdziela w od x lub y (inaczej nowa ścieżka przez w), bez straty ogólności od x. Teraz $X \cup \{y\}$ oddziela w od x w G i ma liczność $k-1$, co daje sprzeczność.
($\impliedby$) Do odseparowania x i y potrzeba co najmniej po jednym wierzchołku z każdej z tych ścieżek. ∎

Twierdzenie. Graf G jest 2-spójny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych trzech różnych wierzchołków x, y, z w G istnieje ścieżka z x do z przechodząca przez y.

Dowód. ($\implies$) Dodajmy wierzchołek w przyległy tylko do x, z. Graf dalej jest dwuspójny, bo w zawsze ma drugiego sąsiada, który łączy go z resztą grafu. w i y są nieprzyległe, więc odpalając twierdzenie Mengera na ich sąsiedztwach dostajemy, że istnieją co najmniej 2 rozłączne ścieżki łączące y i w. Jedna musi iść przez x, a druga przez z, zatem mamy ścieżkę $x \dots y \dots z$.
($\impliedby$) Dla dowolnych trzech wierzchołków x, y, z istnieje ścieżka $x \dots y \dots z$, zatem po usunięciu x dalej istnieje ścieżka $y \rightsquigarrow z$. Wobec ich dowolności graf jest dwuspójny. ■