Strukturalna Teoria Grafów

Notatki

„Radość przez łzy."

Maciej Mikołajczak
Kraków, 2026/2027

Spis treści

1. Podstawowe definicje i motywacja **2**

2. Jakościowe twierdzenia strukturalne **3**

3. Ekstremalne minory **4**

4. Spójność i połączoność **6**

5. Szerokość ścieżkowa **10**

6. Parametry związane z szerokością drzewiastą **11**

7. Splątania **13**

1. Podstawowe definicje i motywacja

2026-10-08

Definicja 1. Niech G, H będą grafami. $(B_x : x \in V(H))$ jest modelem H w G, jeśli:

1. dla każdego $x \in V(H)$ graf $G[B_x]$ jest spójny;
2. dla wszystkich $x, y \in V(H)$, $x \neq y$ zachodzi $B_x \cap B_y = \emptyset$;
3. dla wszystkich $xy \in E(H)$ istnieją $u \in B_x$, $v \in B_y$ takie, że $uv \in E(G)$.

Zbiory B_x nazywamy branch setami. Jeśli istnieje model H w G, to H jest minorem G, co oznaczamy $H \leq G$.

Uwaga. $H \leq G$ wtedy i tylko wtedy, gdy H można uzyskać z G poprzez usuwanie wierzchołków, usuwanie krawędzi i kontrakcję krawędzi.

Twierdzenie 2 (Kuratowski 1930, Wagner 1937)**.** G jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy K_5 i $K_{3,3}$ nie są minorami G.

klasa	zabronione minory
planarne	$K_5, K_{3,3}$
zewnętrznie planarne	$K_4, K_{2,3}$
lasy	K_3

Tabela 1: Przykłady charakteryzacji klas grafów przez zabronione minory.

Definicja 3. Klasa grafów $\mathcal{C}$ jest zamknięta na branie minorów, jeśli $H \leq G$ i $G \in \mathcal{C}$ implikuje $H \in \mathcal{C}$.

Twierdzenie 4 (Robertson, Seymour)**.** Dla każdej zamkniętej na branie minorów klasy $\mathcal{C}$ istnieją grafy $H_1, \ldots, H_k$ takie, że $\mathcal{C} = \{G : \forall_{i \in [k]}\ H_i \not\leq G\}$.

Uwaga. Odpowiednik powyższego twierdzenia nie zachodzi dla relacji bycia podgrafem. Na przykład dla klasy lasów trzeba zabronić wszystkich (nieskończenie wielu) cykli.

Definicja 5. Niech G, H będą grafami. $((B_x : x \in V(H)), (P_e : e \in E(H)))$ jest modelem topologicznym H w G, jeśli:

1. dla każdego $x \in V(H)$ zachodzi $|B_x| = 1$;
2. dla każdego $e \in E(H)$ P_e jest ścieżką w G;
3. jeśli $e = xy$, to P_e łączy x i y;
4. dla $e \neq f \in E(H)$ ścieżki P_e i P_f są rozłączne poza końcami;
5. dla $x \neq y \in V(H)$ zachodzi $B_x \cap B_y = \emptyset$.

Mówimy wtedy, że H jest podpodziałem (subdivision) G, co oznaczamy $H \leq_{\text{top}} G$.

Uwaga. Dla minorów topologicznych również nie zachodzi analog twierdzenia Robertsona Seymoura.

Definicja 6. Problem H-MINOR-TESTING dostaje na wejściu graf G i polega na stwierdzeniu, czy $H \leq G$.

Uwaga. Robertson i Seymour pokazali, że H-MINOR-TESTING da się rozwiązać w czasie $O(n^3)$, gdzie $n = |V(G)|$. W 2024 roku pokazano, że istnieje algorytm działający w czasie $n^{1+o(1)}$.

Definicja 7. Niech k będzie stałą a $\mathcal{C}$ klasą grafów. Klasę

$$\mathcal{C}^{+k} = \left\{G : \exists_{X \subseteq V(G), |X| \leq k}\ G - X \in \mathcal{C}\right\}$$

nazywamy k-apeksową klasą $\mathcal{C}$.

Definicja 8. Operacja sumy klikowej (clique-sum) polega na wzięciu grafów $G_1, G_2 \in \mathcal{C}$ (gdzie $\mathcal{C}$ jest klasą grafów) i znalezieniu w nich zbiorów wierzchołków X_i takich, że $|X_i| = k$ i $G_i[X_i] = K_k$ dla pewnego k. Następnie sklejamy G_1 i G_2 parami łącząc wierzchołki X_1 i X_2 i być może usuwamy jakieś krawędzi. Definiujemy

$$\mathcal{C}^* = \{G : G \text{ da się uzyskać jako sumę klikową grafów z } \mathcal{C}\}.$$

Uwaga. Jeśli $\mathcal{C}$ jest zamknięta na branie minorów, to $\mathcal{C}^{+k}$ i $\mathcal{C}^*$ też.

2. Jakościowe twierdzenia strukturalne

2026-10-09

Definicja 9. Niech G będzie grafem. Dekompozycją drzewiastą G nazywamy parę $\left(T, (B_t)_{t \in V(T)}\right)$, jeśli:

- T jest drzewem;
- dla każdego $v \in V(G)$ zbiór $\{t \in V(T) : v \in B_t\}$ jest niepusty i indukuje spójne poddrzewo T;
- dla każdego $uv \in E(G)$ istnieje $t \in V(T)$ takie, że $u, v \in B_t$.

Szerokością $(T, (B_t))$ nazywamy wartość $\max_{t \in V(T)} |B_t| - 1$.

Szerokością drzewiastą G, oznaczaną $\mathrm{tw}(G)$, nazywamy najmniejszą szerokość dekompozycji drzewiastej G.

Przykład. Mamy $\mathrm{tw}(K_n) = n - 1$, co wynika z własności Helly'ego dla drzew. Jeśli T jest lasem, to $\mathrm{tw}(T) = 1$ (to samo drzewo, wierzchołki dodajemy do worków ich dzieci).

Propozycja 10.

$$H \leq G \implies \mathrm{tw}(H) \leq \mathrm{tw}(G).$$

Dowód. Minor otrzymujemy przez ciąg operacji kontrakcji i usuwania wierzchołków i krawędzi. Zaczynamy z optymalną dekompozycją dla G, kontrakcja to złączenie poddrzew tych wierzchołków, pozostałe są proste. □

Propozycja 11. Niech $\mathcal{C}_k$ będzie klasą grafów otrzymanych z grafów o co najwyżej $k+1$ wierzchołkach domkniętą na sumę klikową. Wtedy $\mathcal{C}_k$ to grafy o szerokości drzewiastej co najwyżej k.

Dowód. Grafy na $k+1$ wierzchołkach mają trywialną dekompozycję o szerokości k. Wiemy, że wszystkie elementy kliki znajdują się w jednym worku dekompozycji, więc dekompozycję dla sumy klikowej można otrzymać z dekompozycji dwóch grafów łącząc wierzchołki odpowiadające workom z całą kliką krawędzią.

Zakładamy, że mamy dekompozycję drzewiastą $(T, (B_t))$ o szerokości co najwyżej k dla grafu G o więcej niż $k+1$ wierzchołkach. Niech t będzie liściem T a s jego jedynym sąsiadem. Możemy założyć, że $B_t \setminus B_s \neq \emptyset$, bo w przeciwnym wypadku można usunąć ten liść. Niech $S = B_t \cap B_s$ i $X = B_t \setminus S$. Rozważamy grafy $G_1 = G[B_t]$ i $G_2 = G[V(G) \setminus X]$. Zauważmy, że pokrywają one wszystkie krawędzie G, bo X nie ma krawędzi idących poza B_t. Możemy dodać krawędzie między wszystkie wierzchołki S, dostając grafy G_1^+ i G_2^+. G_1^+ ma co najwyżej $k+1$ wierzchołków, a G_1^+ ma szerokość drzewiastą co najwyżej k. Możemy połączyć G_1^+ i G_2^+ sumą klikową, co daje nam odpowiednią postać G, bo G_2^+ z indukcji jest sumą klikową grafów o co najwyżej $k+1$ wierzchołkach. □

Definicja 12. Niech F będzie ukorzenionym lasem (drzewa z korzeniami). Domknięciem F, ozna-

czanym $\operatorname{clos}(F)$, nazywamy graf powstały poprzez dodanie wszystkich krawędzi pomiędzy do potomków.

Głębokość drzewiasta grafu G, oznaczana $\operatorname{td}(G)$, to najmniejsza liczba k taka, że istnieje ukorzeniony las F o wysokości co najwyżej k taki, że $G \subseteq \operatorname{clos}(F)$.

Uwaga. Jeśli $H \leq G$, to $\operatorname{td}(H) \leq \operatorname{td}(G)$.

Ścieżki mają dowolnie dużą głębokość drzewiastą (korzeń drzewa jest gdzieś na ścieżce, to dzieli ścieżkę na dwie części, z których każda jest w poddrzewie któregoś z dzieci korzenia).

Twierdzenie 13. Dla każdej klasy grafów $\mathcal{C}$ następujące warunki są równoważne.

1. Istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $G \in \mathcal{C}$ $P_k \not\leq G$.
2. Istnieje $d \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $D \in \mathcal{C}$ $\operatorname{td}(G) \leq d$.

Dowód. $(1 \implies 2)$ Puszczamy DFSa, powstanie nam las, który ma głębokość mniejszą niż k (bo ścieżka w drzewie to ścieżka w grafie) i którego domknięcie spełnia odpowiedni warunek.

$(2 \impliedby 1)$ Gdyby była długa ścieżka, to mielibyśmy dużą głębokość drzewiastą. □

Twierdzenie 14 (Erdős, Pósa 1965). Istnieje funkcja f taka, że dla każdego $k \geq 1$ i grafu G zachodzi

1. G ma k rozłącznych cykli lub
2. istnieje $X \subseteq V(G)$, $|X| \leq f(k)$ takie, że $G - X$ nie ma cykli.

Wniosek. Dla każdej klasy grafów $\mathcal{C}$ następujące warunki są równoważne.

1. Istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że każdy $G \in \mathcal{C}$ nie zawiera k rozłącznych cykli.
2. Istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $G \in \mathcal{C}$ istnieje $X \subseteq V(G)$, $|X| \leq m$ takie, że $G - X$ nie ma cyklu.

Definicja 15. Dekompozycja ścieżkowa grafu G to para $\left(T, (B_t)_{t \in V(T)}\right)$, która jest dekompozycją drzewiastą, a T jest ścieżką. Szerokość ścieżkowa, oznaczana $\operatorname{pw}(G)$, to najmniejsza szerokość dekompozycji ścieżkowej G.

Uwaga. Drzewa mają nieograniczoną szerokość ścieżkową.

Twierdzenie 16 (Bienstock, Robertson, Seymour, Thomas 1983). Istnieje taka funkcja f, że dla każdego $n \geq 1$, lasu F takiego, że $|V(F)| = n$ i grafu G jeśli $\operatorname{pw}(G) \geq f(n)$, to $F \leq G$.

Wniosek. Dla każdej klasy grafów $\mathcal{C}$ następujące warunki są równoważne.

1. Istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $G \in \mathcal{C}$ $\operatorname{pw}(G) \leq k$.
2. Istnieje las H taki, że dla każdego $G \in \mathcal{C}$ $H \not\leq G$.

Twierdzenie 17 (O kracie, Robertson, Seymour 1986). Istnieje funkcja f taka, że dla każdej liczby $n \geq 1$ i każdego grafu G jeśli $\operatorname{tw}(G) \geq f(n)$, to $\boxplus_n \leq G$.

Wniosek. Istnieje funkcja f taka, że dla każdego planarnego H jeśli $H \not\leq G$, to $\operatorname{tw}(G) \leq f(H)$.

3. Ekstremalne minory

2026-10-16

Pomysł. Wiemy, ile krawędzi musi mieć n-wierzchołkowy graf, aby na pewno zawierał K_r jako podgraf. Zastanawiamy się, jak to wygląda dla relacji bycia minorem.

Propozycja 18. Dla każdego $r \geq 1$ i każdego grafu G jeśli $d(G) \geq 2^{r-2}$, to $K_r \leq G$.

Dowód. Indukcja po r. Baza $r \leq 2$ jest prosta. Dalej zakładamy $r \geq 3$. Mamy $d(G) \geq 2^{r-2}$. Niech H będzie takim niepustym minorem G, że $d(H) \geq 2^{r-2}$, ale każdy minor H ma mniejszy średni stopień. Ustalmy wierzchołek v i jego sąsiada u (w H). Mamy $|N_H(v) \cap N_H(u)| \geq 2^{r-3}$, bo gdyby było ich mniej, to można rozważyć H/uv, dla którego jest $\frac{2|E(H/uv)|}{|V(H/uv)|} \geq \frac{2|E(H)|-2^{r-3}}{|V(H)|-1} \geq 2^{r-2}$. Sąsiedztwo v ma minimalny stopień 2^{r-3}, więc jest tam model K_{r-1} i można do niego dorzucić v, dostając K_r. □

Lemat 19. Niech $d \geq 1$, $d(G) \geq 2d$. Wtedy istnieje $H \leq G$ taki, że $|V(H)| \leq 2d$ i $\delta(H) \geq d$.

Dowód. Niech M będzie niepustym minorem G takim, że $|E(M)| \geq d|V(M)|$ i żaden minor M nie spełnia tego warunku. Wtedy $|E(M)| = d|V(M)|$ (inaczej można usunąć krawędź). Dla $xy \in E(M)$ mamy $|N_M(x) \cap N_M(y)| \geq d$, bo inaczej można skontraktować tę krawędź. Mamy $\sum_{v \in V(M)} \mathrm{d}_M(v) = 2d|V(M)|$. Z tego istnieje $x \in V(M)$ taki, że $\mathrm{d}(x) \leq 2d$. Bierzemy $H = M[N_M(x)]$. □

Lemat 20. Niech $d \geq 1$ i $3 \mid d$. Jeśli $|V(H)| \leq 2d$ i $\delta(H) \geq d$, to istnieje $F \subseteq_{\text{ind}} H$ taki, że $|V(F)| \leq 2d$ i $\delta(F) \geq \frac{2}{3}d$ oraz F jest $\frac{d}{3}$-spójny.

Dowód. Zakładamy, że H nie jest $\frac{d}{3}$-spójny. Zatem mamy takie trzy podzbiory wierzchołków X, Y, S, że $X, Y \neq \emptyset$, $|S| < \frac{d}{3}$ i $H - S$ nie ma X-Y krawędzi. Bez straty ogólności $|X| \leq |Y|$. Mamy $|X| \leq d$. Niech $F = H[X]$. Minimalny stopień spada co najwyżej o $\frac{d}{3}$, bo nie ma krawędzi do Y a w S jest co najwyżej $\frac{d}{3}$ wierzchołków.

Weźmy dowolne $x, y \in X$. Mamy $|N_F(x) \cap N_F(y)| \geq \mathrm{d}_F(x) + \mathrm{d}_F(y) - |X| \geq \frac{d}{3}$. Zatem nie da się zabić nawet wszystkich sąsiadów za pomocą mniej niż $\frac{d}{3}$ wierzchołków. □

Lemat 21. Niech J będzie spójny, $|V(J)| \leq 2d$, $\delta(J) > \frac{d}{3}$. Wtedy $\mathrm{diam}(J) \leq 14$.

Dowód. Załóżmy, że najdłuższa najkrótsza ścieżka to $v_0 \cdots v_{15}$. Sąsiedztwa $v_0, v_3, v_6, v_9, v_{12}, v_{15}$ są rozłączne. To daje nam ponad $6 \cdot \frac{d}{3} = 2d$ wierzchołków. Sprzeczność. □

Twierdzenie 22 (Kostochka, Thomason 80'). Dla każdego $r \geq 1$ i każdego grafu G jeśli $d(G) = \Omega\left(r\sqrt{\ln r}\right)$, to $K_r \leq G$.

Dowód (Alon, Krivelevich, Sudakov 2022). Ustalamy $r \geq 2$ i G. Bierzemy $s = \left\lceil 24 + \sqrt{12\ln(2r)} \right\rceil$, $d = 48rs$ i $q = 2de^{-\frac{s}{12}}$. Mamy

$$s \leq 25 + \sqrt{24\ln r} \leq \left(\frac{25}{\sqrt{\ln 2}} + \sqrt{24}\right)\sqrt{\ln r} < 35\sqrt{\ln r},$$

$$2d = 96rs < 3360r\sqrt{\ln r} \leq d(G).$$

Lematy 19 i 20 dają, że istnieje $F \leq G$ takie, że $|V(F)| \leq 2d$, $\delta(F) \geq \frac{2}{3}d$ i F jest $\frac{d}{3}$-spójny. Skonstruujemy indukcyjnie $B_1, \ldots, B_r$ będące branch-setami K_r. Załóżmy, że $B_1, \ldots, B_{i-1}$ już mamy. Trzymamy niezmienniki:

1. $\forall_{j \neq j' \in [i-1]} B_j \cap B_{j'} = \emptyset$,
2. $\forall_{j \in [i-1]} |B_j| \leq 14s$,
3. $\forall_{j \in [i-1]} F[B_j]$ jest spójny,
4. $\forall_{j \neq j' \in [i-1]}$ w F istnieje krawędź między B_j i $B_{j'}$,
5. $\forall_{j \in [i-1]} \left|V(F) - \bigcup_{k \in [i-1]} B_k - N_F(B_j)\right| \leq q$.

Niech $U = B_1 \cup \cdots \cup B_{i-1}$. Mamy $|U| \leq 14s(i-1) < 14rs < \frac{d}{3}$. Niech $J = F - U$. J jest spójny i $\delta(J) \geq \delta(F) - |U| > \frac{d}{3}$. Lemat 21 mówi, że $\mathrm{diam}(J) \leq 14$.

Dla każdego $j \in [i-1]$ niech $A_j = \{v \in V(J) : N_F(v) \cap B_j = \emptyset\}$. Mamy $|A_j| \leq q$.

Robimy sampling. Wybieramy s wierzchołków z $V(J)$ niezależnie i jednostajnie. Oznaczamy je przez W. Dla każdego $v \in V(J)$ mamy

$$\mathbb{P}(N_J(v) \cap W = \emptyset) = \left(1 - \frac{\mathrm{d}_J(v)}{|V(J)|}\right)^s \leq \left(1 - \frac{1}{6}\right)^s \leq e^{-\frac{s}{6}},$$

gdzie pierwsza nierówność wynika z $\mathrm{d}_J(v) > \frac{d}{3}$ i $|V(J)| \leq 2d$. Niech Z będzie liczbą wierzchołków w J bez sąsiadów z W. Mamy $\mathbb{E}[Z] \leq 2de^{-\frac{s}{6}}$, więc $\mathbb{P}(Z > q) \leq \frac{\mathbb{E}[Z]}{q} \leq e^{-\frac{s}{12}} < \frac{1}{2}$. Do tego

$$\mathbb{P}(W \subseteq A_j) = \left(\frac{|A_j|}{|V(J)|}\right)^s \leq \left(\frac{q}{\frac{d}{3}}\right)^s = \left(6e^{-\frac{s}{12}}\right)^s = e^{s\ln 6 - \frac{s^2}{12}} \leq e^{-\frac{(s-24)^2}{12}} \leq e^{-\ln(2r)} = \frac{1}{2r}.$$

Z union bounda $\mathbb{P}(\exists_j\, W \subseteq A_j) \leq \frac{1}{2}$. Istnieje wybór W taki, że $Z \leq q$ oraz $W \not\subseteq A_j$ dla żadnego j. Ustalamy korzeń $w \in W$. Dla każdego $w' \in W \setminus \{w\}$ wybieramy ścieżkę łączącą w' z w w J. Ustalamy B_i jako sumę tych ścieżek. Mamy $|B_i'| \leq 1 + 14(|W| - 1) \leq 14s$ i pozostałe warunki. □

Uwaga. Odpowiedni graf losowy świadczy o tym, że powyższe ograniczenie jest optymalne.

Uwaga. Jeśli $\chi(G) \geq k$, to istnieje podgraf $H \subseteq G$ taki, że $d(H) \geq k-1$. Zatem powyższe twierdzenie implikuje hipotezę Hadwigera z funkcją $k\sqrt{\ln k}$.

Twierdzenie 23 (Duchet, Meyniel)**.** Dla każdego $r \geq 1$ i grafu G jeśli $\frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \geq 2r$, to $K_r \leq G$.

Dowód. Indukcja po r. Możemy założyć spójność G, bo jeśli G ma składowe G_1 i G_2, to

$$\frac{|V(G)|}{\alpha(G)} = \frac{\alpha(G_1)}{\alpha(G_1)+\alpha(G_2)}\frac{|V(G_1)|}{\alpha(G_1)} + \frac{\alpha(G_2)}{\alpha(G_1)+\alpha(G_2)}\frac{|V(G_2)|}{\alpha(G_2)},$$

więc teza dla składowych daje tezę.

Zdefiniujemy spójne $H \subseteq G$ i zbiór niezależny $S \subseteq V(H)$ taki, że $|V(H)| \leq 2|S| - 1$. Zaczynamy od $S = \{u\}$ i $H = G[\{u\}]$. Jeśli w $G - V(H)$ istnieje wierzchołek niesąsiadujący z S, to istnieje taki, który ma sąsiada z krawędzią do H (lub sam ją ma). Dodajemy te (potencjalnie) dwa wierzchołki do H, a tego niesąsiadującego z S do S.

Mamy $|V(H)| \leq 2|S| - 1 < 2\alpha(G) \leq 2\frac{|V(G)|}{2r} = \frac{|V(G)|}{r}$. Zatem

$$\frac{\alpha(G - V(H))}{|V(G - V(H))|} \leq \frac{\alpha(G)}{\left(1 - \frac{1}{r}\right)|V(G)|} = \frac{r}{r-1}\frac{\alpha(G)}{|V(G)|} \leq \frac{1}{2(r-1)}.$$

Możemy zawołać indukcję i mieć minor K_{r-1} w $G - V(H)$. Z konstrukcji H wszystkie wierzchołki $G - V(H)$ mają krawędź do H. Zatem H jest branch-setem dającym nam model K_r. □

4. Spójność i połączoność

2026-10-23

Twierdzenie 24 (Menger 1927)**.** Niech G będzie grafem, $A, B \subseteq V(G)$. Wtedy minimalny rozmiar A-B separatora jest równy maksymalnej liczbie rozłącznych A-B ścieżek.

Definicja 25. Niech G będzie grafem, $X, Y \subseteq V(G)$. (X, Y) jest separacją G, jeśli $V(G) = X \cup Y$ oraz nie ma krawędzi pomiędzy $X \setminus Y$ i $Y \setminus X$. Rząd (X, Y) to $|(X, y)| := |X \cap Y|$. Separacja jest właściwa, jeśli $X \setminus Y \neq \emptyset$ i $Y \setminus X \neq \emptyset$.

Twierdzenie 26 (Menger)**.** Niech G będzie grafem, $A, C \subseteq V(G)$. Minimalny rząd separacji (X, Y) takiej, że $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$ jest równy maksymalnej liczbie rozłącznych A-B ścieżek w G.

Definicja 27. Niech G będzie grafem, $X \subseteq V(G)$. X jest połączony w G, jeśli dla każdego $\ell \geq 1$ i dowolnych różnych wierzchołków $s_1, \ldots, s_\ell, t_1, \ldots, t_\ell$ z X istnieją rozłączne ścieżki $P_1, \ldots, P_\ell$ w G takie, że P_i jest s_i-t_i ścieżką i nie ma wierzchołka wewnętrznego w X.

Graf G jest k-połączony, jeśli $|V(G)| \geq 2k$ oraz dla każdego $X \subseteq V(G)$ jeśli $|X| \leq 2k$, to X jest połączony.

Uwaga. k-połączoność implikuje k-spójność, bo jeśli $X \subseteq V(G)$ i $|X| < k$, to można dorzucić do X dwa inne wierzchołki i z połączoności da się między nimi przejść nie wchodząc w X.

Propozycja 28. Dla każdego $r \geq 1$ i grafu G takiego, że $d(G) \geq 2^{\binom{r}{2}}$ zachodzi $K_r \leq_{\text{top}} G$.

Dowód. Pokażemy, że dla każdego $m \in \left\{r, \ldots, \binom{r}{2}\right\}$ jeśli $d(G) \geq 2^m$, to G ma jako minor topologiczny pewien graf o r wierzchołkach i m krawędziach. Baza $m = r$ wynika z tego, że możemy przejść do podgrafu $H \subseteq G$ z $\delta(H) \geq 2^{r-1} \geq r - 1$. Znajdziemy w nim cykl długości co najmniej r (patrzymy na najdłuższą ścieżkę, sąsiedzi końca na niej leżą, patrzymy na cykl zamykany przez ten koniec i najdalszego na ścieżce sąsiada).

Rozważmy teraz $m > r$. Niech $U \subseteq V(G)$ będzie maksymalny taki, że $G[U]$ jest spójny i $d(G/U) \geq 2^m$ (istnieje, bo singletony to spełniają). Niech $H = G[N(U)]$. Dla każdego $v \in V(H)$ jest $\mathrm{d}_H(v) \geq 2^{m-1}$ (inaczej można go wziąć do U). Zatem z indukcji mamy graf na r wierzchołkach i $m - 1$ krawędziach jako minor topologiczny w H, a dowolną brakującą krawędź można dodać przechodząc przez U. □

Twierdzenie 29 (Jung 1970; Larman, Mani 1970). Istnieje funkcja f taka, że dla każdego $k \geq 1$ i grafu G jeśli G jest $f(k)$-spójny, to G jest k-połączony.

Dowód. Niech $f(k) = 2^{\binom{3k}{2}} + 2k$. G jest $f(k)$-spójny, więc ma średni stopień co najmniej $f(k)$. Z Propozycji 28 mamy $K_{3k} \leq_{\text{top}} G$. Niech $U \subseteq V(G)$ będą wierzchołkami kliki w modelu K_{3k}. Wybierzmy dowolne wierzchołki $s_1, \ldots, s_k, \ldots, t_1, \ldots, t_k$. Graf jest co najmniej $2k$-spójny, więc z twierdzenia Mengera istnieją rozłączne ścieżki P_i i Q_i łączące odpowiednio s_i i t_i z U (bo nie ma małej separacji). Do tego wybieramy rodzinę $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_k, Q_1, \ldots, Q_k\}$ tak, by używała jak najmniej krawędzi spoza modelu K_{3k}. Niech $u_1, \ldots, u_k$ będą wierzchołkami U, których te ścieżki nie używają.

Niech ścieżka P_i łączy s_i z u a ścieżka Q_i łączy t_i z u'. Niech P i Q będą ścieżkami w modelu łączącymi u_i odpowiednio z u i u'. Niech x będzie pierwszym na P idąc od u_i wierzchołkiem należącym do $\mathcal{P}$. Załóżmy, że leży on na ścieżce innej niż P_i. Wtedy ta ścieżka idzie z pewnego s_j lub t_j do wierzchołka U różnego od u i u_i. Zatem w pewnym momencie musi rozłączyć się z P i pójść krawędzią nie należącą do modelu kliki. Zatem można zmienić jej tracę i poprowadzić ją przez P do u_i, co przeczy minimalności $\mathcal{P}$. Zatem x należy do P_i. Jeśli podobnie zdefiniujemy y dla Q, to będzie on leżeć na Q_i. Teraz możemy zdefiniować ścieżkę $s_i P_i x P u_i Q y Q_i t_i$. Takie ścieżki są rozłączne, co daje tezę. □

Lemat 30. Niech H będzie grafem, $\delta(H) \geq 8k$ i $|V(H)| \leq 16k$. Wtedy H ma k-połączony podgraf.

Dowód. Załóżmy, że H nie jest k-połączony. Niech $s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k$ o tym świadczą. Niech $\mathcal{P}$ będzie największą rodziną rozłącznych s_i-t_i ścieżek takich, że każda ścieżka ma długość co najwyżej 7. Spośród takich wybieramy taką minimalizującą liczbę użytych wierzchołków. Powiedzmy, że $\mathcal{P}$ nie ma s_1-t_1 ścieżki. Niech J będzie grafem na $s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k$ i ścieżkach z $\mathcal{P}$. Niech $K = H - J$.

$v \in V(K)$ ma co najwyżej 3 sąsiadów na każdej ścieżce z $\mathcal{P}$, bo inaczej można taką ścieżkę skrócić idąc przez v. Do tego sąsiaduje z co najwyżej jednym wierzchołkiem z każdej niepołączonej pary s_i-t_i. Zatem $|N_G(v) \cap V(J)| \leq 3|\mathcal{P}| + 1(k - |\mathcal{P}|) \leq 3k$. Z tego wynika $\delta(K) \geq 5k$. Do tego $|V(K)| \leq 14k$.

Pokażemy, że K nie jest spójny. Mamy $|V(J) \setminus \{s_1, t_1\}| \leq 8(k-1)$. Zatem s_1 ma sąsiada s w K i podobnie t_1 ma sąsiada t w K. Niech $S = \{s' \in K : d_k(s, s') \leq 2\}$ i $T = \{t' \in K : d_k(t, t') \leq 2\}$. Mamy $S \cap T = \emptyset$ i nie ma S-T krawędzi w K, bo inaczej istnieje odpowiednia s_1-t_1 ścieżka. Dla każdego $v \in V(K - (S \cup T))$ zbiory $N_K(s)$, $N_K(t)$ i $N_K(v)$ są rozłączne i mają co najmniej $5k$ elementów, co przeczy $|V(K)| \leq 14k$. Zatem $V(K) = S \cup T$ i brak S-T krawędzi daje niespójność

K.

Niech C będzie najmniejszym komponentem K. Mamy $2\delta(C) \geq 2\delta(K) \geq 10k \geq \frac{1}{2}|V(K)| + 3k \geq |V(C)| + 3k$. Z tego wynika, że każde dwa wierzchołki z C mają co najmniej $3k$ wspólnych sąsiadów. Z $\delta(C) \geq 5k$ wynika w szczególności $|V(C)| \geq 2k$. Bierzemy wierzchołki $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$ z C. Możemy je łączyć ich wspólnymi sąsiadami i zawsze wystarczy. □

Definicja 31. Niech $k \geq 0$, G będzie grafem, $A, B, X \subseteq V(G)$. (A, B) jest X-separacją G, jeśli (A, B) jest właściwą separacją G rzędu co najwyżej $|X|$ taką, że $X \subseteq A$. Dodatkowo (A, B) jest mała, jeśli $|A \cap B| < |X|$, a połączona, jeśli $A \cap B$ jest połączony w $G[B]$.

Notacja. Niech $U \subseteq V(G)$ dla grafu G. Przez $\|U\|^+$ oznaczamy liczbę krawędzi w G o co najmniej jednym końcu w U.

Twierdzenie 32 (Thomas, Wollan 2005)**.** Dla każdego $k \geq 1$ i grafu G jeśli G jest $16k$-spójny, to G jest k-połączony.

Dowód. Pokażemy, że jeśli G jest $2k$-spójny i $|E(G)| \geq 8k|V(G)|$, to G jest k-połączony. Ten drugi warunek wynika z dużej spójności, bo spójność wymusza duży minimalny stopień.

Mówimy, że $U \subseteq V(G)$ jest lekki, jeśli $\|U\|^+ \leq 8k|U|$. W przeciwnym przypadku U jest ciężki.

Indukcyjnie pokażemy, że dla $X \subseteq V(G)$ takiego, że $|X| \leq 2k$ jeśli $V(G) \setminus X$ jest ciężki i dla każdej małej X-separacji (A, B) zbiór $B \setminus A$ jest lekki, to X jest połączony w G. Wtedy biorąc dowolny $X \subseteq V(G)$ rozmiaru $2k$ dostaniemy, że nie istnieją małe X-separacje (bo graf jest $2k$-spójny) oraz $\|V(G) \setminus X\|^+ \geq |E(G)| - \binom{2k}{2} \geq 8k|V(G)| - 2k^2 > 8k|V(G) \setminus X|$, więc $V(G) \setminus X$ jest ciężki. Zatem X jest połączony.

Teraz przechodzimy do dowodu przez indukcję na $\left(|V(G)|, \|V(G) \setminus X\|^+\right)$. Jeśli $|V(G)| = 1$, to teza zachodzi.

***Stwierdzenie* 32.1.** Możemy założyć, że G nie ma połączonej X-separacji.

Dowód. Niech (A, B) będzie połączoną X-separacją z minimalnym A. Niech $S = A \cap B$. Najpierw załóżmy $|S| = |X|$. Jeśli $G[A]$ zawiera $|X|$ rozłącznych X-S ścieżek, to X jest połączony (idziemy tymi ścieżkami do S, który jest połączony w $G[B]$, więc możemy połączyć odpowiednie wierzchołki). W przeciwnym wypadku z twierdzenia Mengera $G[A]$ ma małą X-separację (A', B') taką, że $S \subseteq B'$. Jeśli wybierzemy $|A' \cap B'|$ minimalne, to z twierdzenia Mengera możemy połączyć $A' \cap B'$ z S za pomocą $|A' \cap B'|$ rozłącznych ścieżek. Wtedy $(A', B' \cup B)$ jest połączoną X-separacją, co przeczy wyborowi (A, B).

Dalej zakładamy $|S| < |X|$. (A, B) jest małą X-separacją, więc $B \setminus A$ jest lekki w G. Niech G' będzie grafem powstałym z $G[A]$ poprzez dodanie wszystkich możliwych krawędzi w S. $V(G) \setminus X$ jest ciężki w G, a G' powstaje z G poprzez usunięcie $|B \setminus A|$ wierzchołków spoza X i co najwyżej $8k|B \setminus A|$ krawędzi. Zatem $A \setminus X$ jest ciężki w G'. Załóżmy, że istnieje mała X-separacja (A', B') w G' taka, że $B' \setminus A'$ nie jest lekki w G'. Do tego załóżmy, że B' jest minimalne. $G'[S]$ jest kliką, więc $S \subseteq A'$ lub $S \subseteq B'$.

Jeśli $S \subseteq A'$, to $B \cap B' \subseteq S \subseteq A'$ (pierwsze zawieranie z tego, że S to jedyne wierzchołki B w G'). Zatem $(A' \cup B, B')$ jest małą X-separacją G (jej rząd nie wzrósł względem (A', B')). Co więcej, $B' \setminus (A' \cup B) = B' \setminus A'$ i żadna z krawędzi dodanych do G' względem G nie jest incydentna z tym zbiorem. Zatem ciężkość $B' \setminus A'$ w G' implikuje ciężkość tego zbioru w G, co jest sprzeczne z założeniem tezy indukcyjnej.

Dalej zakładamy $S \subseteq B'$. Niech $G'' = G'[B']$. Pokażemy, że G'' spełnia założenia tezy indukcyjnej dla zbioru $X'' = A' \cap B'$. Zbiór $B' \setminus X'' = B' \setminus A'$ jest ciężki (w G', ale w G'' też). Z minimalności B' każda mała X''-separacja (A'', B'') w G'' będzie taka, że $B'' \setminus A''$ jest lekki, bo $(A' \cup A'', B'')$ jest małą X-separacją G' i $B'' \setminus A'' = B'' \setminus (A' \cup A'')$. Zatem z założenia indukcyjnego X'' jest połączony w G''. To implikuje, że X'' jest połączony w $G[B' \cup B]$, bo można połączyć wierzchołki X'' idąc krawędziami z B', a jeśli będziemy przy tym szli krawędzią z S, której nie ma w G, to można skorzystać z tego, że S jest połączony w $G[B]$ i ominąć tę krawędź. Teraz $(A', B' \cup B)$ jest połączoną X-separacją, co przeczy wyborowi A, B.

Ta sprzeczność pokazuje, że dla każdej małej X-separacji (A', B') w G' zbiór $B' \setminus A'$ jest lekki. Z założenia indukcyjnego X jest połączony w G'. Podobnie jak przedtem możemy zamienić krawędzie w S na ścieżki idące przez B, co pokazuje, że X jest połączony w G. To kończy dowód. $\triangleleft$

Niech $s_1, \ldots, s_\ell, t_1, \ldots, t_\ell$ będą różnymi wierzchołkami w X. Możemy dodać do X wszystkie krawędzie poza tymi postaci $s_i t_i$, bo nie wpływa to ani na założenia tezy indukcyjnej, ani na prawdziwość tezy (z definicji szukane ścieżki omijają X).

***Stwierdzenie* 32.2.** Możemy założyć, że dla każdego $uv \in E(G)$ jeśli $u \notin X$ lub $v \notin X$, to $|N_G(u) \cap N_G(v)| \geq 8k - 1$.

Dowód. Niech n będzie liczbą wspólnych sąsiadów u i v. Rozważmy graf $G' = G/uv$. Oznaczmy wierzchołek powstały z kontrakcji przez w. Możemy patrzeć na X jak na podzbiór wierzchołków G' (jeśli X zawiera któreś w u, v, to tylko jedno i można je w nim utożsamić z w). Pokażemy, że jeśli $n < 8k - 1$, to G' spełnia założenia tezy indukcyjnej. Wtedy X będzie połączony w G'. Cofając kontrakcję dostaniemy połączoność X w G.

Mamy $|V(G') \setminus X| = |V(G) \setminus X| - 1$, więc aby $V(G') \setminus X$ był ciężki wystarczy pokazać, że kontraktując uv usunęliśmy co najwyżej $8k$ krawędzi incydentnych z czymś poza X. Jeśli $u, v \notin X$, to usunęliśmy dokładnie $n + 1$ takich krawędzi. Teraz załóżmy, że $u \in X$ i $v \notin X$. Musimy teraz dodatkowo policzyć wszystkie krawędzie vx, gdzie $x \neq u$ jest w X i nie jest sąsiadem u. Istnieje co najwyżej 1 taki x (bo dodaliśmy krawędzie między wierzchołkami X), więc usunęliśmy co najwyżej $n + 2 \leq 8k$ krawędzi.

Załóżmy teraz, że istnieje mała X-separacja (A', B') w G' taka, że $B' \setminus A'$ jest ciężki. Wybierzmy ją tak, by B' było minimalne. Identycznie jak w dowodzie Stwierdzenia 32.1 pokazujemy, że $X' = A' \cap B'$ jest połączony w $G'[B']$. Niech A i B będą zbiorami wierzchołków G powstałymi z A' i B' poprzez zastąpienie wystąpień w przez oba u, v. Niech $X'' = A \cap B$. Pokażemy, że (A, B) jest połączoną X-separacją, co przeczy Stwierdzeniu 32.1.

Jeśli w leży w $A' \setminus B'$ lub $B' \setminus A'$, to u, v leżą w $A \setminus B$ lub $B \setminus A$. Wtedy $X'' = X'$ i X'' jest połączony w $G[B]$, bo X' jest połączony w $G'[B']$ i można cofnąć kontrakcję. Do tego $|X''| = |X'| < |X|$. Zatem (A, B) jest połączoną X-separacją. Teraz zakładamy $w \in X'$. Pokażemy, że $G[B]$ i X'' spełniają założenia tezy indukcyjnej, co da nam odpowiednią połączoność z indukcji. Mamy $|X''| \leq |X'| + 1 \leq |X| \leq 2k$. $B \setminus X'' = B' \setminus A'$ jest ciężki w G, bo jest ciężki w G' z wyboru (A', B'). Rozważmy małą X''-separację (A'', B'') w $G[B]$. Wtedy $(A \cup A'', B'')$ jest małą X-separacją G. Zatem $B'' \setminus A'' = B'' \setminus (A \cup A'')$ jest lekki. To daje nam, że (A, B) jest połączoną X-separacją. Ta sprzeczność dowodzi, że G' spełnia założenia tezy indukcyjnej, co daje tezę stwierdzenia. $\triangleleft$

Teza indukcyjna zachodzi dla $X = V(G)$ (założenia nie są spełnione), więc możemy przyjąć $V(G) \setminus X \neq \emptyset$. Niech $d^* = \min_{v \in V(G) \setminus X} \deg_G(v)$.

***Stwierdzenie* 32.3.** Możemy założyć $8k \leq d^* \leq 16k - 1$.

Dowód. Ograniczenie dolne wynika ze Stwierdzenia 32.2, o ile założymy, że G nie ma izolowanych wierzchołków poza X. Gdyby takie wierzchołki istniały, to mielibyśmy tezę z indukcji. Dalej zakładamy, że $d^* \geq 16k$. Pokażemy, że X jest k-połączony. Rozważmy krawędź $e = uv$, gdzie co najmniej jedno z u, v nie jest w X. Jeśli $G - e$ spełnia założenia tezy indukcyjnej, to X jest w nim połączony, a więc też w G.

Załóżmy, że $G - e$ ma małą X-separację (A, B) taką, że $B \setminus A$ jest ciężki. Wtedy e musi być $(A \setminus B)$-$(B \setminus A)$ krawędzią, bo inaczej (A, B) jest też separacją w G i mamy sprzeczność z założeniami tezy indukcyjnej. Wtedy jednak wszyscy wspólni sąsiedzi u i v leżą w $A \cap B$ i jest ich mniej niż $|X| \leq 2k$, co daje sprzeczność ze Stwierdzeniem 32.2.

Załóżmy, że $V(G) \setminus X$ jest lekki w $G - e$. W G mamy wtedy $\|V(G) \setminus X\|^+ \leq 8k|V(G) \setminus X| + 1$. Niech $f(x)$ oznacza liczbę krawędzi, które wierzchołek $x \in X$ posyła do $V(G) \setminus X$. Musi być co najmniej jedna taka krawędź, powiedzmy xy, bo inaczej $(X, V(G) \setminus \{x\})$ jest małą X-separacją, co przeczy założeniom tezy indukcyjnej. Ze Stwierdzenia 32.2 x i y mają co najmniej $8k - 1$ wspólnych sąsiadów, z których co najwyżej $2k - 1$ leży w X. Zatem $f(x) \geq 6k$. Mamy

$$2(8k|V(G) \setminus X| + 1) \geq 2\|V(G) \setminus X\|^+ = \sum_{v \in V(G) \setminus X} \mathrm{d}_G(v) + \sum_{x \in X} f(x) \geq 16k|V(G) \setminus X| + 6k|X|.$$

Wynika z tego $2 \geq 6k|X|$, co daje sprzeczność. Zatem $V(G) \setminus X$ jest ciężki w $G - e$, co kończy dowód. ◁

Ustalmy $v_0 \in V(G) \setminus X$ świadczący o d^*. Niech $H = G[N[v_0]]$. Ze Stwierdzenia 32.2 mamy $\delta(H) \geq 8k$. Ze Stwierdzenia 32.3 mamy $|V(H)| \leq 16k$. Z Lematu 30 H ma k-połączony podgraf. Niech L będzie jego zbiorem wierzchołków. Jest $|L| \geq 2k \geq |X|$. Jeśli w G istnieje $|X|$ rozłącznych X-L ścieżek, to X jest połączony. Jeśli nie, to z twierdzenia Mengera G ma małą X-separację (A, B) z $L \subseteq B$. Jeśli wybierzemy $|A \cap B|$ minimalne, to ponownie z twierdzenia Mengera w $G[B]$ istnieje $|A \cap B|$ rozłącznych $(A \cap B)$-L ścieżek. Wtedy (A, B) jest połączoną X-separacją, co przeczy Stwierdzeniu 32.1. □

5. Szerokość ścieżkowa

2026-10-30

Propozycja 33. Dla każdego $n \geq 0$ szerokość ścieżkowa pełnego drzewa ternarnego T_n wynosi co najmniej n.

Dowód. Indukcja po n. Robimy krok dla $n \geq 1$. Ustalamy dekompozycję ścieżkową $(W_1, \ldots, W_s)$ dla T_n. Możemy założyć $W_1, W_s \neq \emptyset$ i ustalmy pewną W_1-W_s ścieżkę. Istnieje co najmniej jedno poddrzewo korzenia T_n, którego ona nie dotyka. $(W_1, \ldots, W_s)$ jest też dekompozycją tego poddrzewa, więc z indukcji istnieje worek, który ma co najmniej n elementów. Do tego ustalona W_1-W_s ścieżka w dekompozycji ścieżkowej jest przedziałem (bo jest spójnym podgrafem), więc w każdym worku jest jej element i przedtem znaleziony worek ma jeszcze jeden element więcej. □

Definicja 34. Niech G będzie grafem, $X \subseteq V(G)$. Definiujemy brzeg X jako

$$\partial X = \{x \in X : \exists_{y \in V(G) \setminus X}\ xy \in E(G)\}.$$

Definicja 35. Niech $M = (M_v : v \in V(H))$ będzie modelem H w G. M jest ukorzeniony w $X \subseteq V(G)$, jeśli dla każdego $v \in V(H)$ jest $M_v \cap X \neq \emptyset$.

Definicja 36. Niech (A, B) i (A', B') będą separacjami. Ustalamy na nich porządek $(A, B) \leq (A', B')$ zadany przez $A \subseteq A'$ i $B' \subseteq B$. Dodatkowo jeśli $|A' \cap B'| \leq |A \cap B|$, to (A', B') rozszerza (A, B).

Lemat 37 (Diestel 1995). Niech G będzie grafem, $t \geq 1$ i niech F będzie lasem na t wierzchołkach. Jeśli $\mathrm{pw}(G) \geq t - 1$, to istnieje $Y \subseteq V(G)$ taki, że

1. $G[Y]$ ma dekompozycję ścieżkową $(W_1, \ldots, W_s)$ taką, że dla każdego $i \in [s]$ mamy $|W_i| \leq t$ oraz $\partial Y \subseteq W_s$;
2. $F \leq G[Y]$;
3. $(M_x : x \in V(F))$ będące modelem F w $G[Y]$ jest ukorzenione w W_s.

Dowód. Dla $t = 1$ mamy $\mathrm{pw}(G) \geq 0$ i graf jest niepusty, więc jest dobrze. Dalej zakładamy $t \geq 2$.

Separację (A, B) grafu G nazywamy dobrą, jeśli $G[A]$ ma dekompozycję ścieżkową o workach wielkości co najwyżej $t - 1$ i $A \cap B$ zawiera się w ostatnim worku. Dobra separacja jest maksymalna, jeśli żadna inna dobra separacja jej nie rozszerza. Jeśli (A, B) jest maksymalna dobra, to $A \neq V(G)$ (bo $\mathrm{pw}(G) \geq t - 1$). Do tego każdy $v \in A \cap B$ ma sąsiada w $B \setminus A$ (bo inaczej można go wyrzucić z B).

***Stwierdzenie* 37.1.** Niech (P, Q) i (A', B') będą separacjami G. Załóżmy, że $(P, Q) \leq (A', B')$. Jeśli (A', B') jest dobra i istnieje $|P \cap Q|$ rozłącznych P-B' ścieżek w G, to (P, Q) jest dobra.

Dowód. Z $P \subseteq A'$ i $B' \subseteq Q$ wynika, że każda P-B' ścieżka przecina $P \cap Q$ i $A' \cap B'$ (a nawet, że zaczyna się w $P \cap Q$ i kończy w $A' \cap B'$). Dla każdego $x \in P \cap Q$ mamy ścieżkę zaczynającą się w x. Oznaczamy ją P_x.

Niech $(W_1, \ldots, W_m)$ będzie dekompozycją ścieżkową $G[A']$ taką, że $A' \cap B' \subseteq W_m$ i $|W_i| \leq t - 1$ dla każdego i. Możemy ustalić $W_i' = (W_i \cap P) \cup \{x \in P \cap Q : V(P_x) \cap W_i \neq \emptyset\}$. Mamy $|W_i'| \leq |W_i| \leq t - 1$, bo wzięliśmy podzbiór, a potem wszystkie dodane elementy zostają dodane dlatego, że w W_i było coś spoza P. Jest to poprawna dekompozycja ścieżkowa $G[P]$ i $P \cap Q \subseteq W_m'$. Zatem (P, Q)

jest dobra. ◁

***Stwierdzenie* 37.2.** Dla każdego lasu H na co najwyżej $t-1$ wierzchołkach istnieje maksymalna dobra separacja (A,B) grafu G rzędu $|V(H)|$ taka, że $G[A]$ zawiera $A\cap B$-ukorzeniony model H.

Dowód. Dla H na 0 wierzchołkach bierzemy (A,B) będące maksymalnym dobrym rozszerzeniem $(\emptyset, V(G))$. Dalej zakładamy $h := |V(H)| \geq 1$.

Wybierzmy $a \in V(H)$ taki, że $\mathrm{d}_H(a) \leq 1$. Z indukcji istnieje (A_0, B_0) będące maksymalną dobrą separacją G rzędu $h-1$. Niech $(M_x : x \in V(H-a))$ będzie modelem $H-a$ w $G[A_0]$ ukorzenionym w $A_0 \cap B_0$. Niech $(W_1, \ldots, W_m)$ będzie dekompozycją ścieżkową $G[A_0]$ taką, że $|W_i| \leq t-1$ dla każdego i oraz $A_0 \cap B_0 \subseteq W_m$.

Musimy teraz znaleźć wierzchołek $v \in V(G)$, który będzie modelował a. Jeśli $\mathrm{d}_H(a) = 0$, to wybieramy dowolne $v \in B_0 \setminus A_0$ (istnieje, bo $A_0 \neq V(G)$). Jeśli $\mathrm{d}_H(a) = 1$, to niech b będzie sąsiadem a w H. Niech $u \in M_b \cap A_0 \cap B_0$. Niech v będzie jego sąsiadem w B_0 (istnieje z maksymalności (A_0, B_0)).

Kładziemy $(A,B) = (A_0 \cup \{v\}, B_0)$. Dekompozycja ścieżkowa to $(W_1, \ldots, W_m, A_0 \cap B_0 \cup \{v\})$. v był w B_0, więc jego jedyne krawędzie idące do A_0 są w $A_0 \cap B_0$ i jest dobrze.

Weźmy (A', B') będące maksymalnym dobrym rozszerzeniem (A,B). Stosujemy twierdzenie Mengera między $A \cap B$ i $A' \cap B'$. Załóżmy, że dostaliśmy separację (P,Q) rzędu $k < h$ taką, że $A_0 \subseteq A \subseteq P \subseteq A'$ i $B' \subseteq Q \subseteq B = B_0$. Jeśli wybierzemy (P,Q) minimalnego rzędu, to ponowne zastosowanie twierdzenia Mengera daje nam $|P \cap Q|$ rozłącznych $(P\cap Q)$-$(A' \cap B')$ ścieżek. Zatem ze Stwierdzenia 37.1 (P,Q) jest dobra, co przeczy maksymalności (A_0, B_0). Z tego wynika, że istnieje $|A \cap B|$ rozłącznych $(A\cap B)$-$(A' \cap B')$ ścieżek. Możemy więc przedłużyć branch sety modelu H ukorzenionego w $A \cap B$ o te ścieżki i dostać model ukorzeniony w (A', B'). Ostatecznie (A', B') jest szukaną separacją. ◁

Niech $a \in V(F)$ będzie taki, że $\mathrm{d}_F(a) \leq 1$. Ze Stwierdzenia 37.2 mamy maksymalną dobrą separację (A,B) i model $F-a$ ukorzeniony w $A \cap B$, który możemy rozszerzyć do modelu F identycznie jak w dowodzie Stwierdzenia 37.2. □

Twierdzenie 38 (Bienstock, Robertson, Seymour, Thomas 1991)**.** Jeśli $\mathrm{pw}(G) \geq n$, to każdy $(n+1)$-wierzchołkowy las jest minorem G.

Dowód. Wynika wprost z Lematu 37. □

6. Parametry związane z szerokością drzewiastą

2026-11-06

Definicja 39. Niech G będzie grafem. $A, B \subseteq V(G)$ dotykają się, jeśli $A \cap B \neq \emptyset$ lub istnieje A-B krawędź. Rodzina $\mathcal{B}$ podzbiorów wierzchołków G jest jeżyną w G, jeśli $G[B]$ jest spójny dla każdego $B \in \mathcal{B}$ i każde dwa $B, B' \in \mathcal{B}$ się dotykają. $X \subseteq V(G)$ trafia jeżynę $\mathcal{B}$, jeśli dla każdego $B \in \mathcal{B}$ jest $X \cap B \neq \emptyset$. Rząd jeżyny $\mathcal{B}$ to wielkość najmniejszego zbioru trafiającego $\mathcal{B}$. Liczba jeżynowa G to największy rząd jeżyny w G. Oznaczamy ją $\mathrm{bn}(G)$.

Przykład. Rozważmy $\boxplus_n$. Niech C_{ij} oznacza sumę wierzchołków z i-tego wiersza i wierzchołków z j-tej kolumny. $\mathcal{B} = \{C_{ij} : i,j \in [n]\}$ jest jeżyną w $\boxplus_n$. Rząd $\mathcal{B}$ to n (bierzemy kolumnę, mniej się nie da).

Twierdzenie 40 (O dualności szerokości drzewiastej; Seymour, Thomas 1993)**.** Dla każdego $k \geq 1$ i grafu G mamy $\mathrm{tw}(G) \geq k$ wtedy i tylko wtedy, gdy G ma jeżynę rzędu większego od k. Inaczej mówiąc $\mathrm{tw}(G) + 1 = \mathrm{bn}(G)$.

Dowód. ($\Longleftarrow$) Niech G będzie grafem, $\mathcal{B}$ jeżyną w G, $(T, \mathcal{V})$ dekompozycją drzewiastą G. Pokażemy, że pewne $V_t \in \mathcal{V}$ trafia $\mathcal{B}$. Dla $B \in \mathcal{B}$ graf $G[B]$ jest spójny, więc indukuje poddrzewo w dekompozycji. Takie poddrzewa dla różnych B, B' się parami przecinają (bo B, B' albo mają wspólne wierzchołki, albo łączą się krawędzią, więc muszą mieć worek, w którym są wierzchołki z obu). Zatem wszystkie poddrzewa przecinają się w jednym wierzchołku T. Bierzemy ten worek.

($\Longrightarrow$) Techniczny dowód. Pomijamy. □

Propozycja 41. Niech G będzie grafem, $\mathcal{B}$ jeżyną w G. Istnieje ścieżka P w G taka, że $V(P)$ trafia $\mathcal{B}$.

Dowód. Jeśli $\mathcal{B}$ jest puste, to pusta ścieżka działa. Jeśli $\mathcal{B}$ nie jest puste, to zaczynamy z dowolnego $v \in B \in \mathcal{B}$. Rozszerzamy ścieżkę trzymając niezmiennik, że koniec aktualnej ścieżki jest w pewnym elemencie jeżyny i jest jedynym wierzchołkiem ścieżki w tym elemencie jeżyny. Jeśli nie trafiliśmy jeszcze wszystkich elementów jeżyny, to aktualny element ma w sobie ścieżkę to nietrafionego elementu jeżyny (albo się z nim przecina, albo ma do niego krawędź). Przedłużamy naszą ścieżkę o tę ścieżkę. □

Definicja 42. Niech G będzie grafem, $F \subseteq E(G)$. Przez $\partial_G F$ (brzeg F) oznaczamy wierzchołki incydentne do krawędzi F i krawędzi spoza F.

Definicja 43. Niech G będzie grafem, $A, B \subseteq G$. (A, B) nazywamy separacją G, jeśli $A \cup B = G$ i $E(A) \cap E(G) = \emptyset$. Rząd (A, B) to $|V(A) \cap V(B)|$.

Uwaga. Powyższa definicja jest równoważna poprzedniej definicji separacji, ale czasem bywa bardziej wygodna, bo jednoznacznie ustalamy, po której stronie jest każda krawędź.

Definicja 44. (T, θ) jest dekompozycją gałęziową grafu G, jeśli T jest drzewem, w którym każdy wierzchołek wewnętrzny ma stopień 3, a θ jest bijekcją z krawędzi G do liści T.

Krawędź $\xi \in E(T)$ indukuje podział krawędzi G (liści T) na dwie części E_1, E_2 odpowiadające spójnym składowym $T - \xi$. Rząd ξ to $|\partial_G E_1| = |\partial_G E_2|$. Inaczej mówiąc rząd ξ to rząd separacji $(G[E_1], G[E_2])$ grafu powstałego z G poprzez usunięcie wierzchołków izolowanych. Szerokość (T, θ) to największy rząd krawędzi w T. Szerokość gałęziowa G to najmniejszy rząd gałęzi G. Oznaczamy to $\mathrm{bw}(G)$. Jeśli $|E(G)| \leq 1$, to przyjmujemy $\mathrm{bw}(G) = 0$.

Propozycja 45 (Robertson, Seymour 1991). Dla każdego G takiego, że $\mathrm{bw}(G) \geq 2$ mamy $\mathrm{bw}(G) \leq \mathrm{tw}(G) + 1 \leq \frac{3}{2}\mathrm{bw}(G)$.

Dowód. Zaczniemy od drugiej nierówności. Zakładamy, że G nie ma wierzchołków izolowanych (nie wpływają na żaden parametr). Niech (T, θ) będzie dekompozycją gałęziową o szerokości $k = \mathrm{bw}(G)$. Dla $v \in V(G)$ patrzymy na krawędzie incydentne z v. Odpowiadają one pewnym liściom T. Niech T_v będzie najmniejszym poddrzewem T, w którym te liście są połączone. Takie poddrzewa zadają nam dekompozycję drzewiastą G nad drzewem T. Oznaczmy ją przez $(T, (B_t))$.

Jeśli $t \in T$ jest liściem, to $|B_t| = 2$. Jeśli $t \in T$ jest wierzchołkiem wewnętrznym, to są do niego incydentne co najwyżej 3 krawędzie ξ_1, ξ_2, ξ_3. Zauważmy, że $v \in B_t$ dokładnie wtedy, gdy v jest incydentny do pewnych krawędzi e, f takich, że $\theta(e)$ i $\theta(f)$ leżą po dwóch stronach któregoś z ξ_1, ξ_2, ξ_3. Dla każdego ξ_i takich wierzchołków jest co najwyżej k. Do tego każdy z nich zliczamy co najmniej dla dwóch z ξ_1, ξ_2, ξ_3. Zatem $2|B_t| \leq 3k$ i worki dekompozycji mają rozmiar co najwyżej $\max\{2, \frac{3}{2}k\} = \frac{3}{2}k$.

Teraz przejdziemy do pierwszej nierówności. Niech $k = \mathrm{tw}(G)+1$. Jeśli $k \leq 1$, to graf nie ma krawędzi i $\mathrm{bw}(G) = 0$. Dalej zakładamy $k \geq 2$. Niech $(T, (V_t))$ będzie dekompozycją drzewiastą o szerokości $k - 1$. Dla każdej krawędzi $uv \in E(G)$ dodajemy do T liść dołączony do wierzchołka, w którym są oba u, v. Worek takiego liścia to $\{u, v\}$. Zawęźmy się do poddrzewa rozpinającego te nowododane liście. Następnie rozdzielmy wierzchołki stopnia większego od 3 (zastępujemy wierzchołek ścieżką, z której każdego wierzchołka odchodzi jedna z oryginalnych krawędzi). Każdy z nowych wierzchołków dostaje ten sam worek, co oryginalny wierzchołek. W ten sposób otrzymaliśmy drzewo T' i worki (B_t) dla jego wierzchołków. Jest to poprawna dekompozycja drzewiasta tej samej szerokości, co poprzednia. Do tego mamy naturalną bijekcję między liśćmi a krawędziami G. Rząd krawędzi $t_1t_2 \in E(T')$ wynosi co najwyżej $|B_{t_1} \cap B_{t_2}| \leq k$, zatem drzewo T' zadaje odpowiednią dekompozycję gałęziową. □

Definicja 46. Niech G będzie grafem. $X \subseteq V(G)$ jest wysoce spójny w G, jeśli dla dowolnych $X_1, X_2 \subseteq X$ istnieje $\min(|X_1|, |X_2|)$ rozłącznych X_1-X_2 ścieżek w G.

Propozycja 47. Niech G będzie grafem, $X \subseteq V(G)$. X jest wysoce spójny wtedy i tylko wtedy, gdy $\min(|X \cap V(A)|, |X \cap V(B)|) \leq |V(A) \cap V(B)|$ dla dowolnej separacji (A, B) grafu G.

Dowód. Jeśli i w A, i w B mamy dużo wierzchołków z X, to nie puścimy wiele rozłącznych ścieżek między tymi dwiema częściami. W drugą stronę jeśli mamy $X_1, X_2 \subseteq X$, których nie da się połączyć, to z twierdzenia Mengera mamy odpowiednią separację. □

Propozycja 48. Niech G będzie grafem, $k \geq 1$. Jeśli $\mathrm{bw}(G) \leq k$, to każdy wysoce spójny $X \subseteq V(G)$ spełnia $|X| \leq 3k$.

Dowód. Mamy dekompozycję gałęziową (T, θ) o szerokości k i zbiór wysoce spójny X. Zakładamy $|X| > 3k$. Oczywiście X nie może zawierać wierzchołków izolowanych. Bierzemy dowolną krawędź ξ w T. Ona generuje separację (A, B) grafu G (bez wierzchołków izolowanych) rzędu co najwyżej k. Z wysokiej spójności X jeden z grafów A, B zawiera co najwyżej k elementów X, a drugi pozostałe (więcej niż k). Orientujemy krawędź ξ w kierunku większej części X. Każda orientacja krawędzi drzewa ma ujście i w tym przypadku nie jest ono w liściu. Niech t będzie ujściem. Liście każdej składowej $T - t$ mają w sobie co najwyżej k wierzchołków X i każdy wierzchołek X musi leżeć w którymś liściu. Zatem $|X| \leq 3k$, sprzeczność. □

Propozycja 49. Niech G będzie grafem, $k \geq 2$. Jeśli $\mathrm{bw}(G) > k$, to G ma zbiór wysoce spójny rozmiaru k.

Dowód. Częściową dekompozycją gałęziową G nazywamy parę (T, θ), gdzie T jest drzewem a θ surjekcją z $E(G)$ do liści T. Szerokość takiej dekompozycji definiujemy analogicznie jak dla zwykłej. Wybierzmy częściową dekompozycję gałęziową (T, θ) o szerokości co najwyżej k i jak największej liczbie liści. Taka dekompozycja istnieje, bo można wziąć drzewo na dwóch wierzchołkach, w którym jeden liść ma przypisaną dowolną krawędź G, a drugi wszystkie pozostałe. Tu skorzystaliśmy z $k \geq 2$. Z $\mathrm{bw}(G) > k$ wynika, że (T, θ) ma liść t etykietowany co najmniej dwiema krawędziami. Oznaczmy zbiór tych krawędzi przez F. Niech ξ będzie jedyną krawędzią przylegającą do t. Niech X będzie zbiorem wierzchołków występujących w liściach po obu stronach ξ. Pokażemy, że $|X| \geq k$ i X jest wysoce spójny w $G[F]$.

Załóżmy nie wprost, że $|X| < k$. Niech $e \in F$ będzie dowolną krawędzią incydentną z choć jednym wierzchołkiem X (lub dowolną krawędzią, gdy $X = \emptyset$). Możemy zmodyfikować drzewo T poprzez dołączenie do t nowych liści t_1 i t_2. t_1 jest etykietowany $\{e\}$, a t_2 jest etykietowany $F \setminus \{e\}$. Po obu stronach tt_1 występują tylko końce e, a po obu stronach tt_2 występują elementy X i końce e. Ponieważ tylko jeden z końców e nie należy do X, to takich wierzchołków jest co najwyżej $|X|+1 \leq k$ (gdy X jest pusty, to mamy $2 \leq k$). Zatem otrzymana dekompozycja ma szerokość co najwyżej k i ma więcej liści, niż T. Sprzeczność.

Załóżmy nie wprost, że X nie jest wysoce spójny w $G[F]$. Wtedy istnieje separacja (A, B) grafu $G[F]$ rzędu s taka, że $|X \cap V(A)|, |X \cap V(B)| > s$. Dołączamy do t liście t_1 i t_2. t_1 dostaje etykiety $E(A)$, a t_2 dostaje $E(B)$. Wierzchołki występujące po obu stronach t_1 zawierają się w $(X \cap V(A)) \cup (V(A) \cap V(B))$, a więc jest ich mniej, niż w X. Analogicznie dla t_2. Zatem mamy szerokość co najwyżej k i więcej liści, niż T. Sprzeczność. □

Propozycja 50. Niech G będzie grafem, $\mathcal{B}$ jeżyną w G a X najmniejszym zbiorem trafiającym $\mathcal{B}$. Wtedy X jest wysoce spójny w G.

Dowód. Załóżmy, że X nie jest wysoce spójny. Wtedy istnieje separacja (A, B) rzędu s taka, że i w A, i w B jest więcej niż s wierzchołków X. Elementy $\mathcal{B}$, które nie są trafiane przez $V(A) \cap V(B)$ wszystkie leżą w A lub w B (bo się dotykają). Bez straty ogólności załóżmy, że w A. Teraz $X \cap V(B)$ można zastąpić przez $V(A) \cap V(B)$ i dostać mniejszy zbiór trafiający $\mathcal{B}$. Sprzeczność. □

7. Splątania

2026-11-13

Definicja 51. Niech G będzie grafem, $k \geq 1$. Splątaniem rzędu k grafu G nazywamy taką rodzinę $\mathcal{T}$ $(k-1)$-separacji G, że

(T1) dla każdej $(k-1)$-separacji (A, B) zachodzi $(A, B) \in \mathcal{T}$ lub $(B, A) \in \mathcal{T}$;

(T2) jeśli $(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3) \in \mathcal{T}$, to $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \neq G$;

(T3) $V(A) \neq V(G)$ dla każdej $(A, B) \in \mathcal{T}$.

Dla $(A, B) \in \mathcal{T}$ mówimy, że A jest małą stroną, a B dużą stroną. Przez $\mathrm{tn}(G)$ oznaczamy największy rząd splątania w G.

Przykład. Niech $e \in E(G)$. Zbiór 1-separacji (A, B) takich, że $e \in E(B)$ jest 2-splątaniem.

Niech $X \subseteq V(G)$ indukuje klikę. Zbiór $(k-1)$-separacji (A, B) takich, że $X \subseteq V(B)$ jest splątaniem, jeśli $k < \frac{2}{3}|X|+1$. Punkt (T3) wynika z tego, że w przecięciu A i B jest mniej niż $\frac{2}{3}|X|$ wierzchołków. Punkt (T2) wynika z tego, że w trzech małych częściach separacji jest sumarycznie mniej niż $2|X|$ wierzchołków X, więc istnieje taki, który występuje tylko w jednej z tych trzech części. Wtedy wszystkie jego krawędzie muszą być w niej realizowane, co nie jest możliwe.

Uwaga. Niech $\mathcal{T}$ będzie rodziną wszystkich $(k-1)$-separacji (A, B) grafu $\boxplus_k$ takich, że B zawiera wiersz $\boxplus_k$. Wtedy $\mathcal{T}$ jest splątaniem rzędu k.

Propozycja 52. Niech $(A_1, B_1), (A_2, B_2)$ będą separacjami G. Separacjami są też $(A_1 \cap A_2, B_1 \cup B_2)$ oraz $(A_1 \cup A_2, B_1 \cap B_2)$. Zachodzi

$$|(A_1 \cap A_2, B_1 \cup B_2)| + |(A_1 \cup A_2, B_1 \cap B_2)| = |(A_1, B_1)| + |(A_2, B_2)|.$$

Dowód. Dla dowolnej separacji (P, Q) mamy

$$|(P, Q)| = |V(P) \cap V(Q)| = |V(P)| + |V(Q)| - n,$$

gdzie n to liczba wierzchołków w grafie. Zatem

$$\begin{aligned}
&|(A_1 \cap A_2, B_1 \cup B_2)| + |(A_1 \cup A_2, B_1 \cap B_2)| \\
&= |V(A_1 \cap A_2)| + |V(B_1 \cup B_2)| + |V(A_1 \cup A_2)| + |V(B_1 \cap B_2)| - 2n \\
&= |V(A_1)| + |V(A_2)| + |V(B_1)| + |V(B_2)| - 2n = |(A_1, B_1)| + |(A_2, B_2)|.
\end{aligned}$$

□

Uwaga. Niech G będzie grafem a $\mathcal{T}$ splątaniem rzędu k. Niech (A, B) i (A', B') będą $(k-1)$-separacjami G. Wtedy

- $|V(A)| < k$ implikuje $(A, B) \in \mathcal{T}$;
- $(A, B) \in \mathcal{T}$ i $B \subseteq B'$ implikuje $(A', B') \in \mathcal{T}$;
- $(A, B), (A', B') \in \mathcal{T}$ i $|(A \cup A', B \cap B')| < k$ implikuje $(A \cup A', B \cap B') \in \mathcal{T}$;
- jeśli $k \geq 2$ oraz (A, B) i (A', B') różnią się tylko na wierzchołkach izolowanych, to $(A, B) \in \mathcal{T} \iff (A', B') \in \mathcal{T}$;
- jeśli $k \geq 3$ i $V(A) = V(A')$, $V(B) = V(B')$, to $(A, B) \in \mathcal{T} \iff (A', B') \in \mathcal{T}$.

Propozycja 53. $\mathrm{bn}(G) \leq 3\,\mathrm{tn}(G)$.

Dowód. Niech $\mathcal{B}$ będzie jeżyną w G rzędu większego niż $3(k-1)$. Pokażemy, że G ma splątanie rzędu k. To da tezę, bo biorąc $k = \mathrm{tn}(G) + 1$ dostajemy $\mathrm{bn}(G) \leq 3\,\mathrm{tn}(G)$.

Niech (A, B) będzie separacją rzędu mniejszego niż k. Niech $S = V(A) \cap V(B)$. S nie trafia $\mathcal{B}$, zatem istnieje $Z \in \mathcal{B}$ takie, że $Z \subseteq V(A) \setminus V(B)$ lub $Z \subseteq V(B) \setminus V(A)$. Orientujemy $\{A, B\}$ w stronę Z. Nie zależy to od wyboru Z, bo wszystkie elementy jeżyny nietrafiane przez S leżą po tej samej stronie.

Twierdzimy, że tak powstaje $\mathcal{T}$ będące splątaniem rzędu k. (T1) jest oczywiste, (T3) wynika z tego, że duża strona ma wierzchołki Z, których nie ma mała strona. Weźmy nie wprost $(A_i, B_i) \in \mathcal{T}$ takie, że $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = G$. Niech $S_i = V(A_i) \cap V(B_i)$ i $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. Wtedy $|S| \leq 3(k-1)$. Zatem S nie trafia $\mathcal{B}$ i istnieje $Z \in \mathcal{B}$ takie, że $S \cap Z = \emptyset$. Ale $Z \subseteq S$ z definicji $\mathcal{T}$. Sprzeczność. □

Propozycja 54. $\mathrm{bn}(G) \leq \frac{3}{2}\,\mathrm{tn}(G)$.

Dowód. Robimy to samo, co w dowodzie Propozycji 53. Jedyne, co wymaga zmiany, to argument za (T2). Nie wprost wybieramy $(A_i, B_i) \in \mathcal{T}$ takie, że $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = G$ i minimalizujące $\sum_{i\in[3]} V(A_i) + E(A_i) - V(B_i) - E(B_i)$.

***Stwierdzenie* 54.1.** $A_i \subseteq B_j$ dla $i \neq j$.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że $A_1 \not\subseteq B_2$. Niech $(C_1, D_1) = (A_1 \cap B_2, B_1 \cup A_2)$ i $(C_2, D_2) = (A_2 \cap B_1, B_2 \cup A_1)$. Wtedy $|(C_1, D_1)| + |(C_2, D_2)| = |(A_1, B_1)| + |(A_2, B_2)| < 2k$. Zatem jedna z tych separacji ma rząd $< k$, powiedzmy (C_1, D_1). Wtedy $(C_1, D_1) \in \mathcal{T}$, bo jeśli w $A_1 \setminus B_1$ nie było elementu jeżyny, to w $C_1 \setminus D_1$ tym bardziej. Mamy $(A_1 \cap B_2) \cup A_2 = (A_1 \cup A_2) \cap (B_2 \cup A_2) = A_1 \cup A_2$, bo $B_2 \cup A_2 = G$. Zatem $C_1 \cup A_2 \cup A_3 = G$. Sprzeczność z minimalnością wybranych separacji. ◁

Bierzemy $D_1 = A_2 \cup A_3$, $D_2 = A_1 \cup A_3$, $D_3 = A_1 \cup A_2$. Mamy $D_i \subseteq B_i$ oraz $E(A_i) \cap E(D_i) = \emptyset$ i $A_i \cup D_i = G$. Zachodzi $|(A_i, D_i)| \leq |(A_i, B_i)| < k$. Zatem $(A_i, D_i) \in \mathcal{T}$. Definiujemy $S_i = V(A_i) \cap V(D_i)$ i $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. $|S_i| \leq k - 1$ i każdy $x \in S$ leży w co najmniej dwóch różnych S_i, S_j. Zatem $2|S| \leq 3(k-1)$ i S nie trafia jeżyny. □

Propozycja 55. Niech G będzie grafem takim, że $|E(G)| \geq 2$ i $\mathrm{tn}(G) \geq 3$. Wtedy $\mathrm{bw}(G) \geq \mathrm{tn}(G)$.

Dowód. Załóżmy, że $\mathcal{T}$ jest splątaniem rzędu $\mathrm{tn}(G) \geq 3$, a (T, θ) dekompozycją gałęziową szerokości $k < \mathrm{tn}(G)$. Ukorzeńmy T w dowolnym liściu r.

Rozważmy $\xi = t_1 t_2 \in E(T)$. Zadaje ona k-separację $(G_{\xi,t_1}, G_{\xi,t_2})$ grafu G bez wierzchołków izolowanych. Dorzucamy je do G_{ξ,t_i} takiego, że t_i i r są w tej samej składowej $T - \xi$. Tak powstała separacja jest w $\mathcal{T}$. Orientujemy ξ w stronę wierzchołka indeksującego dużą część separacji. Rozważmy ujście t takiej orientacji. Jeśli t jest liściem a $\xi = t't$ jego jedyną krawędzią, to $(G_{\xi,t'}, G_{\xi,t}) \in \mathcal{T}$. W związku z $\mathrm{tn}(G) \geq 3$ możemy założyć, że $G_{\xi,t}$ nie ma w sobie izolowanych wierzchołków. Wtedy jednak ma dokładnie 2 wierzchołki i powinno być $(G_{\xi,t}, G_{\xi,t'}) \in \mathcal{T}$.

Jak t nie jest liściem, to jest incydentny z dokładnie trzema krawędziami, które zadają separacje $(A_1, B), (A_2, B_2), (A_3, B_3)$. Z faktu, że t jest ujściem wynika $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = G$. Sprzeczność. □

Propozycja 56. Niech G będzie grafem takim, że $\mathrm{bw}(G) \geq 3$. Wtedy $\mathrm{tn}(G) \geq \frac{1}{3}(\mathrm{bw}(G) - 1)$.

Dowód. Na mocy Propozycji 49 mamy zbiór wysoce spójny o mocy $\mathrm{bw}(G) - 1$. Niech to będzie X. Definiujemy $\mathcal{T}$ jako rodzinę wszystkich $\left(\left\lceil \frac{|X|}{3} \right\rceil - 1\right)$-separacji (A, B) takich, że $|V(A) \cap X| \leq |V(B) \cap X|$. (T1) jest oczywiste. Jeśli mamy $(A, B) \in \mathcal{T}$, to $|V(A) \cap V(B)| < \frac{|X|}{3}$. Na mocy Propozycji 47 mamy $|V(A) \cap X| < \frac{|X|}{3}$. Trzy małe części nie mogą pokryć X, więc mamy (T2). Do tego w $B \setminus A$ musi być coś z X, co daje (T3). □

Uwaga. Okazuje się, że zachodzi nawet $\mathrm{bw}(G) = \mathrm{tn}(G)$ dla każdego grafu G o $\mathrm{bw}(G) \geq 2$.

Definicja 57. Niech G będzie grafem, $k \geq 1$. Niech $\mathcal{T}$ będzie splątaniem G rzędu k. Ustalmy $X \subseteq V(G)$. Przez $\kappa(X)$ oznaczamy minimalny rząd separacji $(A, B) \in \mathcal{T}$ takiej, że $X \subseteq V(A)$. Jeśli taka separacja nie istnieje, to ustalamy $\kappa(X) = k$.

Propozycja 58. Zachodzi:

1. $\kappa(\emptyset) = 0$;
2. $\kappa(X) \leq \kappa(X \cup \{x\}) \leq \kappa(X) + 1$ dla dowolnych $X \subseteq V(G), x \in V(G)$;
3. $\kappa(X \cap Y) + \kappa(X \cup Y) \leq \kappa(X) + \kappa(Y)$.

Dowód. (1) Wynika z $(\emptyset, G) \in \mathcal{T}$.

(2) Pierwsza nierówność jest oczywista, druga wynika z tego, że można wziąć separację dobrą dla X i dorzucić x do małej strony (jeśli już go tam nie było).

(3) Jeśli $\kappa(X) = k$ lub $\kappa(Y) = k$, to nierówność zachodzi. W przeciwnym wypadku rozważmy

separacje (A, B) i (C, D) dobrane odpowiednio dla X i Y. Niech $\sigma_1 = (A \cap C, B \cup D)$ i $\sigma_2 = (A \cup C, B \cap D)$. O obu z nich wiemy, że jeśli mają mały rząd, to należą do $\mathcal{T}$. Zatem

$$\kappa(X \cap Y) + \kappa(X \cup Y) \leq \min(k, |\sigma_1|) + \min(k, |\sigma_2|) \leq |\sigma_1| + |\sigma_2| = |(A, B)| + |(C, D)| = \kappa(X) + \kappa(Y).$$

□