

TEORIA CZĘŚCIOWYCH PORZĄDKÓW

NOTATKI

„Grafy są dla chłopców, a posety – dla mężczyzn.”

MACIEJ MIKOŁAJCZAK
Kraków, 2025

Spis treści

1. Descent into madness	2
2. Posetowy zwierzyniec	6
3. Porządki planarne	8
4. Lasy Schnydera	12
5. Dekompozycje separujące	18
6. Porządki przedziałowe	23
7. Podposety przedziałowe	26
8. Problemy geometryczne	28
9. Wymiar bez standardowych przykładów	31
10. Wymiar i rzadkość	34
11. Algorytmy on-line	36
12. Kolorowanie First-Fit	39

1. Descent into madness

Definicja 1. Poset to para $P = (X, \leq)$, gdzie $\leq$ jest częściowym porządkiem na X .

Definicja 2. Dla posetu P i jego elementu x upsetem tego elementu nazywamy zbiór $U(x) = \{y \in P : x < y\}$. Analogicznie definiujemy downset $D(x)$. Przez $U[x]$ i $D[x]$ oznaczamy domknięty upset i downset (zawierający też x).

Definicja 3. Elementy $x, y \in X$ są porównywalne w P , jeśli $x \leq y$ w P lub $y \leq x$ w P . W przeciwnym wypadku są nieporównywalne.

Definicja 4. (x, y) jest w relacji pokrycia w P , jeśli $x < y$ w P oraz nie istnieje z takie, że $x < z < y$ w P .

Uwaga. Rysując diagramy Hasse'ego posetów rysujemy tylko relację pokrycia, czyli nie rysujemy połączeń wynikających z przechodniości.

Definicja 5. Łańcuch to zbiór elementów porównywalnych. Wielkość największego łańcucha to wysokość. Antyłańcuch to zbiór, w którym różne elementy są nieporównywalne. Wielkość największego antyłańcucha to szerokość.

Lemat 1. Jeśli P jest posetem o wysokości h , to elementy P można podzielić na h antyłańcuchów.

Dowód. Nie da się lepiej, bo elementy łańcucha muszą być w różnych antyłańcuchach. Bierzymy elementy minimalne, one tworzą antyłańcuch. Potem je usuwamy i iterujemy. Skończymy po h iteracjach, bo inaczej mamy dłuższy łańcuch. $\square$

Twierdzenie 1 (Dilworth 1950). Jeśli P jest posetem o szerokości w , to elementy P można podzielić na w łańcuchów.

Dowód. Nie da się lepiej, bo elementy antyłańcucha muszą być w różnych łańcuchach. Dowód na dyskretniej. $\square$

Definicja 6. L jest liniowym rozszerzeniem posetu P , jeśli L jest liniowym porządkiem na elementach P zgodnym z porządkiem w P :

$$\forall x, y \in P \quad x \leq y \text{ w } P \implies x \leq y \text{ w } L.$$

Propozycja 1. Każdy (nawet nieskończony) poset ma liniowe rozszerzenie.

Algorytm 1 (Algorytm generyczny). Mając poset P na n elementach robimy

```
for  $i = 1 \dots n$  do
  wybierz  $x_i$  jako element minimalny w  $P \setminus \{x_1, \dots, x_{i-1}\}$ 
end for
return  $(x_1, \dots, x_n)$ 
```

Taki algorytm jest dobrze zdefiniowany, zawsze zwraca liniowe rozszerzenie P i każde liniowe rozszerzenie P jest możliwe na wyjściu.

Propozycja 2. Niech P będzie posetem i niech $a \parallel b$ w P . Wtedy istnieje liniowe rozszerzenie L takie, że $b < a$ w L .

Dowód. Dowód przez algorytm generyczny – bierzemy a tylko, gdy nie ma innej opcji. Wtedy jeśli bierzemy a , to b musiało już być wzięte, bo inaczej istnieje element minimalny pod b , który zostanie wzięty zamiast a . $\square$

Wniosek.

$$P = \bigcap_{L \text{ liniowe rozszerzenie } P} L.$$

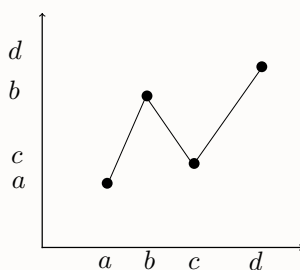
Definicja 7. Wymiar posetu P , oznaczany $\dim(P)$, to najmniejsza dodatnia liczba naturalna d taka, że istnieją $L_1, \dots, L_d$ będące liniowymi rozszerzeniami P takie, że $P = \bigcap_{i \in [d]} L_i$.

Przykład. Dla posetu $P = (\{a, b, c, d\}, \{(a, b), (c, b), (c, d)\})$ mamy $\dim(P) \leq 2$, bo można wziąć liniowe rozszerzenia a, c, b, d i c, d, a, b .

Definicja 8. Zbiór liniowych rozszerzeń $\mathcal{R}$ posetu P jest realizatorem P , jeśli $\bigcap_{R \in \mathcal{R}} R = P$.

Propozycja 3. $\dim(P)$ jest równy najmniejszej liczbie dodatniej naturalnej d takiej, że elementy P można zanurzyć w $\mathbb{R}^d$ w taki sposób, że $x < y$ w $P \iff \text{punkt}(x) < \text{punkt}(y)$ w $\mathbb{R}^d$.

Dowód. Łatwo widać, że zanurzenie zadaje nam kilka porządków liniowych, które tworzą realizator. Z kolei realizator pozwala nam znaleźć kolejność na linii rzeczywistej.



Rysunek 1: Zanurzenie posetu w $\mathbb{R}^2$.

□

Przykład. Wymiar łańcucha to 1. Wymiar antyłańcucha to ≤ 2 , bo można wziąć odwrotne do siebie porządki liniowe.

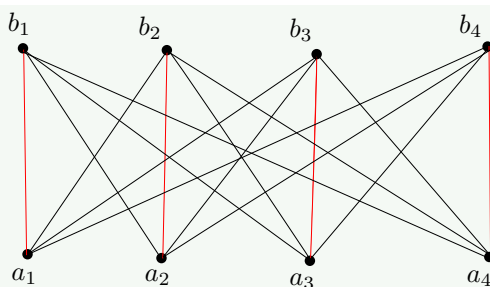
Twierdzenie 2. Dla zadanego P rozpoznawanie, czy $\dim(P) \leq 2$ jest wielomianowe, a $\dim(P) \leq 3$ już NP-zupełne.

Pomysł. Czy istnieją posety o dużym wymiarze? Tak, a przykładem tego jest krata boolowska.

Lemat 2. Zachodzi $\dim(\mathcal{B}_n) \leq n$.

Dowód. Produkujemy $L_1, \dots, L_n$ algorytmem generycznym, w którym dla L_i preferujemy wybór takich zbiorów X , że $i \notin X$. Pokażemy, że to jest realizator. Weźmy nieporównywalne X, Y . Wtedy mamy jakieś $i \in X \setminus Y$. Patrzymy na moment w L_i , gdy brany jest X . Jeśli Y nie został wybrany, to jest nad jakimś aktualnym elementem minimalnym Z . Wtedy $i \in X$, $i \notin Y$, ale $Z \subseteq Y$, co daje sprzeczność. Zatem Y został już wybrany i mamy $Y \leq X$ w L_i . Podobny argument dla $j \in Y \setminus X$ daje nam $Y \geq X$ w L_j . □

Definicja 9. Standardowym przykładem rzędu n nazywamy poset jak na rysunku. Składa się on z dwóch zbiorów $\{a_1, \dots, a_n\}, \{b_1, \dots, b_n\}$ takich, że $a_i \parallel b_i$ oraz $a_i < b_j$ dla wszystkich $j \neq i$. Oznaczamy taki poset S_n .



Rysunek 2: Standardowy przykład rzędu 4.

Lemat 3. Zachodzi $\dim(S_n) \geq n$.

Dowód. Oznaczmy przez $A = \{a_1, \dots, a_n\}, B = \{b_1, \dots, b_n\}$ dwa zbiory elementów przykładu standardowego. Rozważmy realizator $L_1, \dots, L_k$. Dla każdego $i \in [n]$ musi istnieć takie $f(i)$, że $b_i < a_i$ w $L_{f(i)}$. W takiej sytuacji mamy $A \setminus \{a_i\} < b_i < a_i < B \setminus \{b_i\}$, a więc nie może być $b_{i'} < a_{i'}$ dla $i' \neq i$. Z tego wynika, że funkcja $f(i)$ jest iniekcją, a więc musi być $k \geq n$. $\square$

Propozycja 4. Jeśli dla posetów $P = (X_1, \leq_1)$ oraz $Q = (X_2, \leq_2)$ mamy $X_1 \subseteq X_2$ a $\leq_1$ jest porządkiem indukowanym z $\leq_2$, to $\dim(P) \leq \dim(Q)$.

Dowód. Porządki liniowe w realizatorze Q muszą zawierać te same przeciwstawne pary, co w P , a do tego jeszcze inne. $\square$

Wniosek. Krata $\mathcal{B}_n$ zawiera w sobie S_n (można wziąć zbiory jednoelementowe i ich dopełnienia), a więc $\dim(\mathcal{B}_n) \geq n$, czyli $\dim(\mathcal{B}_n) = n$.

Uwaga. Zauważmy, że $\text{height}(S_n) = 2$. Zatem posety o ograniczonej wysokości mogą mieć dowolnie duże wymiary.

Twierdzenie 3 (Dilworth 1950). Dla każdego posetu P mamy $\dim(P) \leq \text{width}(P)$.

Dowód. Weźmy podział na w łańcuchów $C_1, \dots, C_w$. L_i – porządek wyprodukowany przez algorytm generyczny preferujący elementy $x : x \notin C_i$. Weźmy $x, y \in P$ takie, że $x \parallel y$ w P .

Weźmy i, j takie, że $x \in C_i, y \in C_j$. Jest $i \neq j$. Patrzymy na L_i . W momencie wzięcia x on musi być jedynym elementem minimalnym, bo inaczej byłoby coś nie z C_i i to zostałoby wzięte. Zatem y musiał już zostać wzięty (bo inaczej byłby nad x) i mamy $y \leq x$ w L_i . Podobnie $x \leq y$ w L_j , a więc skonstruowaliśmy realizator. $\square$

Definicja 10. Dla posetu P oznaczamy $\text{Inc}(P) = \{(x, y) : x \parallel y \text{ w } P\}$.

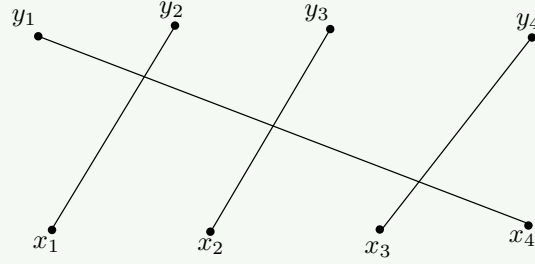
Definicja 11. Niech $(x, y) \in \text{Inc}(P)$ i niech L będzie liniowym rozszerzeniem P . Wtedy L odwraca (x, y) , jeśli $y < x$ w L .

Definicja 12. Mając $I \subseteq \text{Inc}(P)$ mówimy, że I jest odwracalny, jeśli istnieje liniowe rozszerzenie L posetu P takie, że dla każdego $(x, y) \in I$ porządek L odwraca (x, y) .

Propozycja 5. $\dim(P)$ to najmniejsza liczba naturalna d taka, że zbiór $\text{Inc}(P)$ ma podział na d odwracalnych zbiorów.

Dowód. Rozszerzenia liniowe świadczące o takim podziale są realizatorem. $\square$

Definicja 13. Dla $k \geq 2$ i $i \in [k]$ rozważmy pary $(x_i, y_i) \in \text{Inc}(P)$. Wtedy $((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k))$ nazywamy cyklem alternującym (naprzemiennym), jeśli $x_i \leq y_{i+1}$ w P (dodajemy modulo k). W szczególności może być $x_i = y_{i+1}$. Cykl alternujący może też mieć w sobie inne nierówności niż te wymagane.



Rysunek 3: Cykl alternujący długości 4.

Definicja 14. Cykl alternujący jest ścisły, jeśli $x_i \leq y_j$ w P wtedy i tylko wtedy, gdy $j = i + 1$ (modulo k).

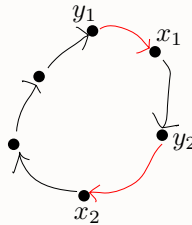
Lemat 4. Niech P będzie posetem i niech $I \subseteq \text{Inc}(P)$. Wtedy następujące zdania są równoważne.

1. I jest odwracalny.
2. I nie zawiera cyklu alternującego.
3. I nie zawiera ścisłego cyklu alternującego.

Dowód. (1 $\implies$ 2) Dla dowodu nie wprost zakładamy odwracalność I i cykl alternujący. Mamy liniowe rozszerzenie L odwracające I . Weźmy cykl alternujący $((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k))$. Z odwrócenia i cyklu alternującego mamy $y_i < x_i \leq y_{i+1}$ w L , czyli $y_i < y_{i+1}$ dla każdego i , a więc $y_1 < y_k < y_1$ – sprzeczność.

(2 $\implies$ 3) Trywialne.

(3 $\implies$ 1) Zakładamy brak ścisłego cyklu alternującego. Niech $I^d = \{(y, x) : (x, y) \in I\}$. Patrzymy na $(P \cup I^d)^+$ – domknięcie przechodnie. Pokażemy, że jest acykliczne. Zakładamy istnienie cyklu. Nie może być w nim jednego przejścia z I^d , bo wtedy elementy łączone są porównywalne (przejście po części w P) i nieporównywalne (przejście po I^d). Zatem co najmniej dwie krawędzie są z I^d . Wtedy elementy łączone tymi krawędziami to y_i, x_i tworzące cykl alternujący.



Rysunek 4: Cykl w domknięciu przechodnim.

Biorąc najkrótszy możliwy cykl w $(P \cup I^d)^+$ dostajemy cykl ścisły – sprzeczność. Zatem zbiór $(P \cup I^d)^+$ jest acykliczny, więc jest posetem. Możemy znaleźć jego liniowe rozszerzenie L , które jest też liniowym rozszerzeniem P i odwraca wszystkie pary z I . $\square$

Przykład. Niech G będzie spójnym grafem o co najmniej dwóch wierzchołkach. Niech $P = (X, \leq)$ będzie posetem, gdzie X to zbiór spójnych indukowanych podgrafów G a $H_1 \leq H_2 \iff H_1 \subseteq H_2$. $\dim(P)$ jest równy liczbie wierzchołków G , które nie są punktem artykulacji.

Dowód. Niech $T = \{x_1, \dots, x_n\}$ będą wierzchołkami, które nie są punktami artykulacji. Bierzemy $Q \subseteq P$ z elementami $\{x_i\}$ i $G - x_i$ (ten graf jest spójny, bo x_i nie jest punktem artykulacji). Te elementy tworzą standardowy przykład, a więc mamy $\dim(P) \geq n$.

Dla ustalonego $i \in [n]$ bierzemy $S_i = \{(H_1, H_2) \in \text{Inc}(P) : \text{dist}(x_i, V(H_1)) < \text{dist}(x_i, V(H_2))\}$.

Twierdzimy, że S_i jest odwracalny i $\bigcup_{i \in [n]} S_i = \text{Inc}(P)$. To będzie pokrycie, które daje ograniczenie na wymiar.

Ustalmy i . Załóżmy, że mamy cykl alternujący $((H_1, K_1), \dots, (H_k, K_k))$ taki, że $(H_j, K_j) \in S_i$. Mamy $\text{dist}(x_i, V(H_j)) < \text{dist}(x_i, V(K_j))$ oraz $H_j \subseteq K_{j+1}$, a z tego wynika $\text{dist}(x_i, V(K_{j+1})) \leq \text{dist}(x_i, V(H_j))$. To daje nam

$$\text{dist}(x_i, V(K_1)) \leq \text{dist}(x_i, V(H_k)) < \text{dist}(x_i, V(K_k)) \leq \dots < \text{dist}(x_i, V(K_1)),$$

a więc sprzeczność. S_i nie ma cyklu alternującego, a więc jest odwracalny.

Teraz weźmy $(H, K) \in \text{Inc}(P)$. Mamy $v \in V(H) \setminus V(K)$. Jeśli v nie jest punktem artykulacji, to $v = x_i$ i $(H, K) \in S_i$. Jak v jest punktem artykulacji, to dzieli G na kilka składowych, z których tylko jedna może zawierać wierzchołki K (bo v jest punktem artykulacji a K go nie zawiera). Puszczamy w innej składowej DFS'a, liść drzewa przeszukiwania nie jest punktem artykulacji (oznaczymy go x_j) i jest z niego bliżej do v niż do czegośkolwiek w K , zatem $(H, K) \in S_j$. Pokazaliśmy, że zbiory S_j pokrywają całe $\text{Inc}(P)$, co kończy dowód.

2. Posetowy zwierzyniec

2025-03-10

Definicja 15. Liczbą standardowego przykładu posetu P nazywamy rozmiar największego standardowego przykładu, który zawiera się w P . Oznaczenie $\text{se}(P)$.

Pomysł. W grafach liczba chromatyczna jest ograniczona z dołu przez liczbę klikową. Podobnie w posetach wymiar jest ograniczony przez liczbę standardowego przykładu. Również tutaj można znaleźć obiekty o dowolnie dużym wymiarze, które nie zawierają dużych standardowych przykładów.

Definicja 16. Rozważmy graf G i zbiór jego wierzchołków i krawędzi. Wprowadzamy na nich porządek: każdy wierzchołek jest pod krawędzią go zawierającą (i nie ma innych relacji). Tak zdefiniowany poset nazywamy posetem incydencji grafu G i oznaczamy go I_G .

Uwaga. Grafy incydencji nie zawierają standardowych przykładów rzędu więcej niż 3, bo element odpowiadający krawędzi ma pod sobą dokładnie dwa elementy.

Lemat 5.

$$\dim(I_{K_n}) = \Omega(\log \log n).$$

Dowód. Niech $V_1 = V(K_n)$ i niech $\{L_1, \dots, L_d\}$ będzie realizatorem I_{K_n} .

Lemat Erdősa-Szekeresa daje nam zbiór $V_2 \subseteq V_1$ taki, że $|V_2| \geq \sqrt{n}$ i L_1, L_2 porządkują elementy V_2 tak samo lub dokładnie odwrotnie. Aby to zobaczyć wystarczy uporządkować V_1 w kolejności L_1 a następnie przypisać jego elementom wartości zgodne z L_2 – dostajemy ciąg monotoniczny.

Iterując dostajemy V_d o rozmiarze $|V_d| \geq n^{\frac{1}{2^{d-1}}}$ taki, że $L_1, \dots, L_d$ porządkują elementy V_d tak samo z dokładnością do odwrócenia. Jeśli $|V_d| \geq 3$, to bierzemy $a, b, c \in V_d$. Możliwe kolejności to $a < b < c$ i $c < b < a$. Rozważmy krawędź $z = ac$. Mamy $a < b < c < z$ lub $c < b < a < z$. Zatem mamy $b < z$ w każdym L_i , ale ta para jest nieporównywalna w I_{K_n} . Zatem zadane rozszerzenia liniowe nie tworzą realizatora.

Musi więc być $n^{\frac{1}{2^{d-1}}} \leq |V_d| \leq 2$, a więc $1 \geq \frac{1}{2^{d-1}} \log n$ i $d - 1 \geq \log \log n$. $\square$

Definicja 17. Porządkiem przedziałowym na rodzinie przedziałów $\mathcal{I}$ na osi rzeczywistej nazywamy poset, w którym dla każdego $I, J \in \mathcal{I}$ jest $I < J$, gdy $\forall x \in I, y \in J$ $x < y$.

Poset $P = (X, \leq)$ jest przedziałowy, jeśli istnieje funkcja $f : X \rightarrow \mathcal{I}$, gdzie $\mathcal{I}$ jest rodziną przedziałów na $\mathbb{R}$ oraz f jest izomorfizmem pomiędzy P a porządkiem przedziałowym na $\mathcal{I}$. f nazywamy reprezentacją przedziałową.

Definicja 18. Dla posetów P, Q mówimy, że P jest Q -wolny, jeśli nie istnieje poset $P' \subseteq_{\text{ind}} P$ taki, że P' i Q są izomorficzne.

Definicja 19. $P+Q$ to poset powstały z wzięcia rozłącznych kopii P i Q w taki sposób, że wierzchołki pomiędzy kopiami są nieporównywalne.

Notacja. Liczbę naturalną k identyfikujemy z k -elementowym łańcuchem.

Lemat 6. Niech P będzie posetem. Następujące warunki są równoważne.

1. P jest przedziałowy.
2. P jest $(2+2)$ -wolny.
3. Rodzina $\{D(x) : x \in P\}$ jest liniowo uporządkowana przez inkluzję.
4. Rodzina $\{U(x) : x \in P\}$ jest liniowo uporządkowana przez inkluzję.
5. Istnieje liniowy porządek $A_1, \dots, A_n$ na maksymalnych antyłańcuchach w P taki, że dla każdego $x \in P$ zbiór $\{i : x \in A_i\}$ jest przedziałem w $[n]$.

Dowód. $(1 \implies 2)$ Załóżmy nie wprost, że poset przedziałowy P zawiera $2+2$ o elementach a, b, c, d , gdzie $a < b$ i $c < d$. Przedział a musi leżeć na lewo od b , a c (jako nieporównywalny z nimi oboma) musi przecinać się z a i b . Wtedy jednak d leży na prawo od c , a więc i a . To daje sprzeczność, bo jest $a \parallel d$.

$(2 \implies 3)$ Załóżmy nie wprost, że $D(x)$ i $D(y)$ nie są porównywalne na inkluzję. Wtedy $x \parallel y$ oraz istnieją $x' \in D(x) \setminus D(y)$ i $y' \in D(y) \setminus D(x)$. Zauważmy, że $x' \parallel y'$. Rzeczywiście, gdyby było $x' < y'$, to $x' < y$ wbrew wyborowi x' . Podobnie jeśli $y' < x'$, to $y' < x$. Zatem x, x', y, y' tworzą $2+2$, co daje sprzeczność.

$(2 \implies 4)$ Dowód analogiczny jak poprzedni punkt.

$(3 \implies 1)$ Dla wygody będziemy rozważać przedziały domknięte. Niech $|P| = n$. Rozważmy n punktów na prostej, które numerujemy od prawej kolejnymi liczbami z $[n]$. Niech $x_1, \dots, x_n$ będą wszystkimi elementami P , wypisanymi w kolejności takiej, że $D(x_i) \subseteq D(x_j)$ dla $i \geq j$. Będziemy przypisywać przedziały kolejnym elementom X . Jeśli dla x_i nie istnieje takie $j < i$, że $x_i \parallel x_j$, to x_i dostaje przedział $[i, i]$ (w szczególności x_1 dostaje $[1, 1]$). Jeśli natomiast istnieje, to niech x_j będzie najwcześniejszym w naszej kolejności elementem takim, że $x_i \parallel x_j$. Element x_i dostaje przedział $[j, i]$. Zauważmy, że dla dowolnych i, j takich, że $j < i$ mamy:

- jeśli $x_i \parallel x_j$, to ich przedziały się przecinają.
- jeśli $x_i < x_j$, to $x_i < x_k$ dla każdego $k \leq j$, a więc przedział x_i leży na lewo od przedziału x_j .
- $x_i > x_j$ nie może zajść, bo z $D(x_i) \subseteq D(x_j)$ musiałoby być $x_j < x_i$.

Widzimy więc, że skonstruowane przedziały tworzą poset przedziałowy izomorficzny z P .

$(4 \implies 1)$ Konstrukcja analogiczna jak w poprzednim punkcie. Jedyna różnica jest taka, że tym razem numerujemy punkty od lewej.

$(1 \implies 5)$ Dla każdego antyłańcucha w P istnieje maksymalny przedział taki, że każdy element antyłańcucha przecina się z nim niepusto (jest on wyznaczony przez najpóźniejszy początek i najwcześniejszy koniec przedziału). Dla różnych maksymalnych antyłańcuchów te przedziały są rozłączne, bo inaczej ich suma jest antyłańcuchem, więc nie byłyby maksymalne. Można więc posortować antyłańcuchy po takich przedziałach. Teraz element należy do antyłańcucha dokładnie wtedy, gdy przecina się z jego przedziałem i mamy tezę.

$(5 \implies 2)$ Załóżmy nie wprost, że elementy $a < b$ i $c < d$ tworzą $2+2$. Niech $\{a, c\} \subseteq A_i$, $\{a, d\} \subseteq A_j$ dla pewnych maksymalnych antyłańcuchów A_i, A_j . Bez straty ogólności $i < j$, czyli $a \in A_k$ dla każdego $i \leq k \leq j$. Niech $\{b, c\} \subseteq A_\ell$. Jeśli $i \leq \ell \leq j$, to $a \in A_\ell$, a jeśli $\ell > j$, to $c \in A_j$. W obu sytuacjach mamy sprzeczność z porównywalnością odpowiednich elementów, więc $\ell < i$. Dla $\{b, d\} \subseteq A_t$ podobnie mamy $t > j$. Zatem $b \in A_i$. Ta sprzeczność kończy dowód. $\square$

Definicja 20. Dla $n \geq 2$ definiujemy uniwersalny porządek przedziałowy rzędu n (oznaczany U_n). Jego elementami są przedziały $\{[i, j] : i, j \in [n], i < j\}$. Są to wszystkie przedziały na liczbach naturalnych. Porównujemy je jak w porządku przedziałowym.

Lemat 7.

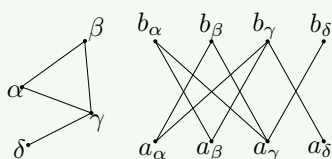
$$\dim(U_n) \geq \log \log n.$$

Dowód. Wiemy, że uogólniony graf przesunięciowy $G_n^{(3)}$ ma $\chi(G_n^{(3)}) \geq \log \log n$. Niech $L_1, \dots, L_d$ będzie realizatorem U_n .

Wiemy, że $[i, j]$ jest nieporównywalne z $[j, k]$, a więc dla każdego i, j, k istnieje $\alpha(i, j, k)$ takie, że $[j, k] < [i, j]$ w $L_{\alpha(i, j, k)}$. Okazuje się, że α jest poprawnym kolorowaniem $G_n^{(3)}$ – bierzemy trójki (i, j, k) i (j, k, ℓ) . Jak mają ten sam kolor, to $[k, \ell] < [j, k]$ i $[j, k] < [i, j]$ w $L_{\alpha(i, j, k)}$, ale w posecie jest $[i, j] < [k, \ell]$ – sprzeczność. Zatem $\alpha(i, j, k)$ musi przyjmować co najmniej $\log \log n$ wartości. $\square$

Uwaga. $2 + 2$ jest tym samym, co S_2 . Zatem posety bez żadnych standardowych przykładów mogą mieć dowolnie duży wymiar.

Definicja 21. Posetem sąsiedztwa grafu G nazywamy poset A_G taki, że dla każdego $v \in V(G)$ w A_G są nieporównywalne elementy a_v, b_v , natomiast krawędź $uv \in E(G)$ daje nam $a_u < b_v$ i $a_v < b_u$.



Rysunek 5: Przykład grafu i jego posetu sąsiedztwa.

Propozycja 6.

$$\dim(A_G) \geq \chi(G).$$

Dowód. Niech $L_1, \dots, L_d$ będzie realizatorem A_G . Dla $v \in V(G)$ mamy parę $a_v \parallel b_v$. Dla każdego $v \in V(G)$ istnieje $\alpha(v)$ takie, że $b_v < a_v$ w $L_{\alpha(v)}$. Funkcja α daje poprawne kolorowanie G , bo jak mamy $\alpha(u) = \alpha(v)$ dla $uv \in E(G)$, to mamy $b_u < a_u < b_v < a_v < b_u$. $\square$

Propozycja 7. Rozważmy poset P taki, że $\text{Inc}(P) \neq \emptyset$. Niech $\mathcal{H}$ będzie hipergrafem, w którym wierzchołkami są elementy $\text{Inc}(P)$, a krawędziami cykle alternujące. Zachodzi

$$\dim(P) = \chi(\mathcal{H}).$$

Dowód. Mając zadany podział na zbiory odwracalne $I_1, \dots, I_d$ można wszystkim parom z jednego zbioru dać ten sam kolor. Wtedy krawędź nie może łączyć tylko wierzchołków o tym samym kolorze, bo to dałoby cykl alternujący w jednym ze zbiorów. To daje nam $\dim(P) \geq \chi(\mathcal{H})$.

Podobnie mając zadane kolorowanie można podzielić elementy $\text{Inc}(P)$ na podstawie koloru. Wtedy w żadnym zbiorze podziału nie ma cyklu alternującego, bo to oznacza jednokolorową krawędź. Zatem $\chi(\mathcal{H}) \geq \dim(P)$. $\square$

Uwaga. Podobnie $\text{se}(P) = \omega(\mathcal{H})$, gdzie klika w hipergrafie to struktura gdzie każde dwa wierzchołki są w dwuelementowej krawędzi ze sobą.

3. Porządki planarne

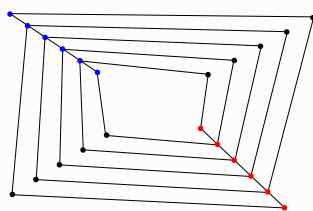
2025-03-17

Pomysł. Dla grafu planarnego G jest $\chi(G) \leq 4$. Będziemy się zastanawiać, czy coś podobnego zachodzi dla posetów.

Propozycja 8. Istnieją posety o dowolnie dużym wymiarze, których grafy pokryć (a nawet diagramy) są planarne.

Dowód. Na rysunku jest Q_6 . Ogólnie Q_n zawiera S_n – w prawej dolnej linii każdy jest pod każdym z lewej górnej poza swoim odbiciem. Mamy nawet $\text{tw}(\text{cover}(Q_n)) \leq \text{pw}(\text{cover}(Q_n)) \leq 9$, więc ten

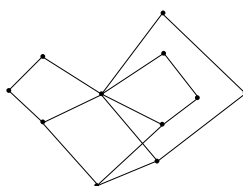
graf jest strukturalnie prosty.



Rysunek 6: Przykład Kelly'ego z 1981.

□

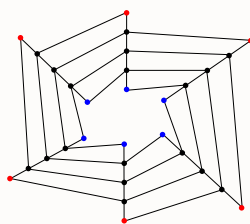
Uwaga. Istnieją posety, których grafy pokryć są planarne, a diagramy już nie.



Rysunek 7: Diagram posetu. Gdyby wierzchołki mogły być ułożone dowolnie, istniałby rysunek planarny.

Propozycja 9. Istnieją posety o dowolnie dużym wymiarze oraz elemencie największym/najmniejszym, których grafy pokryć są planarne.

Dowód. Na rysunku jest koło Trottera rzędu 6. Narysowany jest graf pokryć, a nie diagram – porządek rośnie „do środka” koła. Łatwo zauważyć, że elementy czerwone i niebieskie tworzą standardowy przykład. Do tego można dodać do posetu element największy (do środka i połączyć z niebieskimi) i najmniejszy (na zewnątrz i połączyć z czerwonymi).



Rysunek 8: Koło Trottera z 1978.

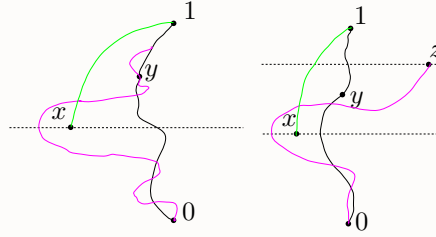
□

Lemat 8. Niech P będzie posetem z planarnym diagramem, elementem najmniejszym 0 i największym 1. Wtedy $\dim(P) \leq 2$.

Dowód. Ustalmy rysunek diagramu. Dla $(x, y) \in \text{Inc}(P)$ mówimy, że x jest na lewo od y , jeśli istnieje maksymalny łańcuch przechodzący przez y taki, że x jest na lewo od łańcucha na rysunku. Oznaczamy $I_{\text{left}} = \{(x, y) \in \text{Inc}(P) : x \text{ na lewo od } y\}$, $I_{\text{right}} = \{(x, y) \in \text{Inc}(P) : x \text{ na prawo od } y\}$. Oczywiście te zbiory pokrywają $\text{Inc}(P)$.

Pokażemy, że te zbiory są rozłączne. Niech $(x, y) \in I_{\text{left}}$. Istnieje maksymalny łańcuch C zawierający y taki, że x jest na lewo od C . Nie wprost założymy, że x jest na prawo od pewnego łańcucha D zawierającego y . Zauważmy, że y znajduje się albo powyżej pierwszego punktu spotkania D z C po

przejściu przez poziom x , albo poniżej ostatniego punktu spotkania przed przejściem przez poziom x . W pierwszym przypadku istnieje łańcuch łączący x z 1 , ale on musi się przecinać w jakimś wierzchołku z C lub D , bo graf jest planarny. Wtedy x jest pod y – sprzeczność. Drugi przypadek analogicznie.



Rysunek 9: x w przedstawionych sytuacjach musi być porównywalny z y lub z .

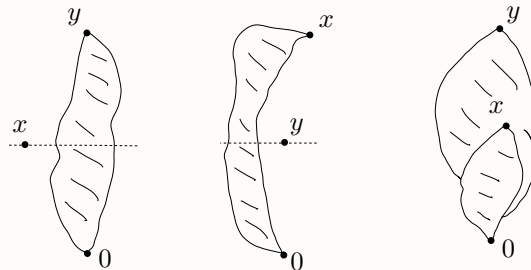
Pokażemy, że I_{left} jest przechodni. Bierzemy $(x, y), (y, z) \in I_{\text{left}}$. Niech świadczą o tym odpowiednio łańcuchy C i D . z musi leżeć na prawo od C , bo inaczej D przecina się z C i y i z są porównywalne. Zauważmy, że musi być $x \parallel z$, bo inaczej porównywalność je łącząca przecina C i powoduje, że jeden z tych elementów jest pod y . Jeśli istnieje łańcuch zawierający z , od którego x jest na prawo, to musi on przecinać C poniżej y , bo inaczej $y < z$ (w przypadku, gdy z jest nad y na diagramie, ale analogiczny argument działa, gdy z jest pod y – wtedy w dalszej części rozważamy 0). Wtedy przechodząc z x do 1 musimy przeciąć któryś z rozważanych łańcuchów, co da nam sprzeczność z $x \parallel y$. Zatem $(x, z) \in I_{\text{left}}$.

Oczywiście analogiczny argument działa dla I_{right} . Możemy teraz skonstruować realizator – w algorytmie generycznym najpierw preferujemy elementy najbardziej prawe (te, które są na lewo od jak najmniejszej ilości elementów), a potem najbardziej prawe. Jeśli $(x, y) \in I_{\text{left}}$, to jeśli y jest na lewo od z , to x też. Zatem y będzie wzięty przed x w pierwszym z tych rozszerzeń. Analogicznie dla prawych par. $\square$

Twierdzenie 4 (Trotter, Moore 1977). Niech P będzie posetem z planarnym diagramem i elementem najmniejszym 0 . Wtedy $\dim(P) \leq 3$.

Dowód. Ustalmy rysunek diagramu. Każdy element x ma najbardziej lewą krawędź wchodzącą do niego. Lewym łańcuchem x nazywamy łańcuch powstały poprzez schodzenie najbardziej lewymi krawędziami z x aż do 0 . Podobnie definiujemy prawy łańcuch.

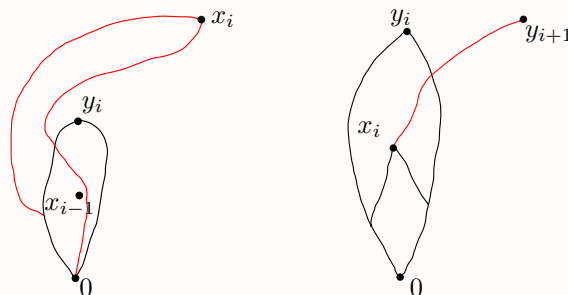
Regionem $R(x)$ nazywamy wszystkie elementy, które na rysunku są w obszarze zamkniętym przez lewy i prawy łańcuch x . Mówimy, że x jest na lewo od y , jeśli region x przecina poziom y na lewo od y lub region y przecina poziom x na prawo od x . W takich sytuacjach y jest na prawo od x . Mówimy, że x jest pod y , jeśli $R(x) \subseteq R(y)$. Wtedy y jest nad x . Łatwo się przekonać, że zawsze zachodzi dokładnie jedna z tych sytuacji i mamy $\text{Inc}(P) = Q_{\text{left}} \sqcup Q_{\text{right}} \sqcup Q_{\text{under}} \sqcup Q_{\text{over}}$.



Rysunek 10: Dwa przykłady, gdy x jest na lewo od y i jeden, gdy y jest nad x .

Załóżmy nie wprost, że w $Q_{\text{left}} \cup Q_{\text{over}}$ jest ścisły cykl alternujący $((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k))$. Wtedy x_{i-1} musi znajdować się w $R(y_i)$, bo inaczej idąc w dół z y_i w kierunku x_{i-1} dostaniemy łańcuch,

który mógłby poprawić lewy łańcuch y_i (być bardziej na lewo niż on). Teraz lewy łańcuch x_i leży na lewo od x_{i-1} , bo najpierw przechodzi na lewo od y_i , a potem albo zostaje na lewo od lewego łańcucha y_i , albo łączy się z nim i idzie tak jak on. Widzimy, że coś takiego nie może zachodzić cyklicznie. Analogiczny argument działa dla Q_{right} .

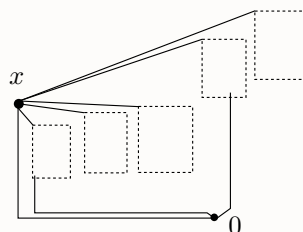


Rysunek 11: Sprzeczności wykazane dla $Q_{\text{left}} \cup Q_{\text{over}}$ i Q_{under} .

Zostało nam Q_{under} . Zakładamy, że mamy cykl alternujący $((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k))$. Nie może być tak, że y_{i+1} wyjdzie poza $R(y_i)$, bo wtedy połączenie x_i z y_{i+1} da nam $x_i < y_i$. Zatem $R(y_{i+1}) \subseteq R(y_i)$, co oczywiście nie może zachodzić cyklicznie. Ostatecznie pokazaliśmy, że $\text{Inc}(P)$ ma podział na 3 odwracalne zbiory, co kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 5 (Moore, Trotter 1977). Niech P będzie posetem. Jeśli graf pokryć P jest lasem, to $\dim(P) \leq 3$.

Dowód. Znajdziemy poset o elemencie minimalnym 0 i planarnym diagramie, który zawiera w sobie P . To da nam tezę. Weźmy korzeń x grafu pokryć P . Ma on kilka poddrzew, od których korzeni x jest albo większy, albo mniejszy. Kładziemy mniejsze poddrzewa poniżej x a większe powyżej i powtarzamy konstrukcję dla nich. Cały czas utrzymujemy niezmiennik, który mówi, że idąc prosto w dół od każdego elementu nie przetniemy żadnej krawędzi. To pozwala nam połączyć każdy element posetu z nowym elementem minimalnym 0 i skonstruować planarny diagram. To kończy dowód.



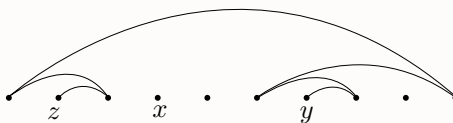
Rysunek 12: Proces uzyskiwania diagramu z grafu pokryć.

$\square$

Definicja 22. Graf jest zewnętrznie planarny, jeśli ma rysunek planarny, na którym wszystkie wierzchołki leżą na zewnętrznej ścianie.

Twierdzenie 6 (Felsner, Trotter, Wiechert 2015). Niech P będzie posetem z zewnętrznie planarnym grafem pokryć. Wtedy $\dim(P) \leq 4$.

Dowód. Jeśli wypiszemy wierzchołki grafu zewnętrznie planarnego idąc zgodnie z ruchem wskazówek zegara po krawędzi zewnętrznej ściany, to wszystkie wierzchołki będą leżały na linii a krawędzie będzie można reprezentować jako łuki nad tą linią. To daje nam naturalne pojęcie lewej i prawej nieporównywalnej pary. Do tego lewa para $(x, y) \in \text{Inc}(P)$ jest aktywna, jeśli istnieje z takie, że $z < y$ w P oraz z jest na lewo od x . Podobnie definiujemy prawą aktywną parę, tym razem z jest na prawo od x .

Rysunek 13: Reprezentacja lewej aktywnej pary (x, y) na linii.

Mamy podział $\text{Inc}(P) = I_{\text{left}}^{\text{active}} \sqcup I_{\text{left}}^{\text{non-active}} \sqcup I_{\text{right}}^{\text{active}} \sqcup I_{\text{right}}^{\text{non-active}}$. Pokażemy, że zbiory lewe są odwracalne, zbiory prawe zachowują się analogicznie.

Założmy nie wprost, że w $I_{\text{left}}^{\text{active}}$ jest cykl alternujący $((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k))$. Wtedy y_{i+1} jest na lewo od y_i , bo jakby było na prawo, to przejście z x_i do y_{i+1} musi przejść przez jeden z wierzchołków na ścieżce $y_i \rightsquigarrow z$, co da nam $x_i < y_i$. To nie może zachodzić cyklicznie – sprzeczność.

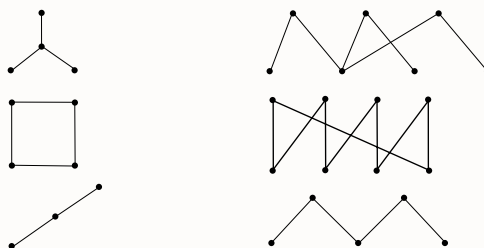
Podobnie jeśli w $I_{\text{left}}^{\text{non-active}}$ jest cykl alternujący, to x_{i-1} jest na prawo od x_i , bo inaczej świadczy o aktywności pary (x_i, y_i) . $\square$

4. Lasy Schnydera

2025-03-24

Propozycja 10. $\dim(I_G) \leq 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest lasem ścieżek.

Dowód. Na rysunku widzimy, że cykle i drzewa niebędące ścieżką mają posety incydencji o wymiarze co najmniej 3, a ścieżki mają wymiar 2.



Rysunek 14: Poset incydencji cyklu to korona, a drzewa z dwoma dziećmi – pająk.

Definicja 23. Niech P będzie posetem. Nieporównywalna para (x, y) jest krytyczna, jeśli dla każdego $z \in P$ mamy $z < x \implies z < y$ oraz $y < z \implies x < z$. Równoważnie $D(x) \subseteq D(y)$ oraz $U(y) \subseteq U(x)$. Zbiór takich par oznaczamy $\text{Crit}(P)$.

Propozycja 11. Niech P będzie posetem a $\mathcal{R}$ pewną rodziną jego liniowych rozszerzeń. $\mathcal{R}$ odwraca wszystkie pary w $\text{Inc}(P)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{R}$ odwraca wszystkie pary w $\text{Crit}(P)$.

Dowód. $(\implies)$ Oczywiste.

$(\impliedby)$ Rozważmy $(x, y) \in \text{Inc}(P)$. Rozważmy następującą procedurę: póki istnieje $x' \in D(x)$, które jest nieporównywalne z y , rozważamy dalej parę (x', y) i powtarzamy ten proces. Potem robimy to samo z y – póki istnieje $y' \in U(y)$ nieporównywalne z x' rozważamy parę (x', y') . Ostatecznie dostajemy parę krytyczną (x', y') , dla której jest $x' \leq x$ oraz $y \leq y'$. W $\mathcal{R}$ jest liniowe rozszerzenie odwracające (x', y') , a więc również (x, y) . $\square$

Definicja 24. Niech G będzie grafem o n wierzchołkach. Definiujemy $\dim(G)$ jako najmniejsze t takie, że istnieją permutacje $\pi_1, \dots, \pi_t \in S_n$ takie, że dla każdego wierzchołka v i krawędzi $e = ab$ takiej, że $v \notin e$ istnieje i takie, że $a, b < v$ w π_i .

Propozycja 12. Jeśli G nie ma wierzchołków stopnia co najwyżej 1, to $\dim(G) = \dim(I_G)$. Natomiast dla G^+ otrzymanego z G przez dodanie wierzchołków stopnia co najwyżej 1 zachodzi

$$\dim(G) \leq \dim(I_{G^+}) \leq \dim(I_G) + 1.$$

Dowód. Mamy $\dim(G) \leq \dim(I_G)$, bo realizator po usunięciu krawędzi daje odpowiednie permutacje wierzchołków. Dla dowodu drugiej strony bierzemy $\pi_1, \dots, \pi_t$ będące realizatorem G i dorzucamy do nich krawędzie dając je tak wcześnie jak się da (czyli po drugim z wierzchołków tworzących krawędź), by otrzymać $L_1, \dots, L_t$ będące liniowymi rozszerzeniami I_G . Rozważamy różne rodzaje par:

- (v, v') – istnieje krawędź f połączona z v' , a nie z v (bo v ma stopień co najmniej 2). Mamy $v' < f < v$ w pewnym L_i .
- (e, e') – jeśli $e = ab$ i $e' = xy$ dla $b \neq y$, to mamy $x, y < e' < b < e$ w pewnym L_i .
- (v, e) – dla $e = ab$ mamy $a, b < e < v$ w pewnym L_i .
- (e, v) – istnieje krawędź $f \ni v$, jeśli $e = ab$ oraz $b \notin f$, to $v < f < b < e$ w pewnym L_i .

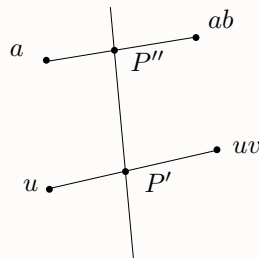
Zatem znaleźliśmy realizator I_G .

Mamy $\dim(G) \leq \dim(I_G) \leq \dim(I_{G^+})$. Dla dowodu ostatniej nierówności weźmy skonstruowany realizator $L_1, \dots, L_t$. Dorzucamy do jego elementów wszystkie nieizolowane nowe wierzchołki z G^+ . Wsadzamy je zaraz za ich sąsiada z G (w jakiejś kolejności). Zaraz za nowo wsadzony wierzchołek wsadzamy krawędź, do której należy. Tworzymy rozszerzenie liniowe L'_t , które wygląda jak L_t poza tym, że nowe wierzchołki wsadzamy przed ich sąsiada z G (w odwrotnej kolejności niż przedtem), a nowe krawędzie zaraz za tego sąsiada. Wierzchołki izolowane umieszczamy w L_t jako elementy maksymalne, a w L'_t jako minimalne. W ten sposób skonstruowaliśmy realizator. $\square$

Twierdzenie 7 (Hanani; Tutte 1970). Jeśli graf G ma taki rysunek, że dowolne dwie niezależne krawędzie (takie bez wspólnych końców) się nie tną, to graf jest planarny.

Lemat 9. Dla każdego grafu G jeśli $\dim(I_G) \leq 3$, to G jest planarny.

Dowód. Rozważmy graf G z $\dim(I_G) \leq 3$. Zanurzamy nasz poset w $\mathbb{R}^3$ i patrzymy na płaszczyznę prostopadłą do wektora $(1, 1, 1)$. Możemy popatrzeć na rzuty elementów naszego posetu na tę płaszczyznę i narysować na niej nasz graf – krawędź między wierzchołkami u, v będzie szła prostą linią od rzutu u do rzutu uv , a następnie do rzutu v . Pokażemy, że niezależne krawędzie nie tną się na takim rysunku, co da nam tezę. Załóżmy nie wprost, że krawędzie uv i ab tną się w jakimś punkcie P . Rozważmy prostą normalną do naszej płaszczyzny przechodzącą przez P . Odcinek od uv do jednego z u, v tnie się z nią w jakimś punkcie P' . Podobnie odcinek od ab do jednego z a, b tnie się z nią w P'' . Bez straty ogólności założmy, że sytuacja jest jak na rysunku. Wtedy mamy $u < P' < P'' < ab$ w $\mathbb{R}^3$ (ogólnie mogliśmy mieć też porównywalność krawędzi lub wierzchołków), bo wektor $(1, 1, 1)$ odpowiada kierunkowi, w którym elementy w $\mathbb{R}^3$ są większe. To daje nam sprzeczność i kończy dowód.

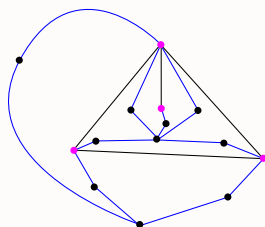


Rysunek 15: Przecięcie odcinków z prostą równoległą do $(1, 1, 1)$ przechodzącą przez P .

$\square$

Propozycja 13. Każdy graf planarny H jest indukowanym podgrafem pewnej triangulacji.

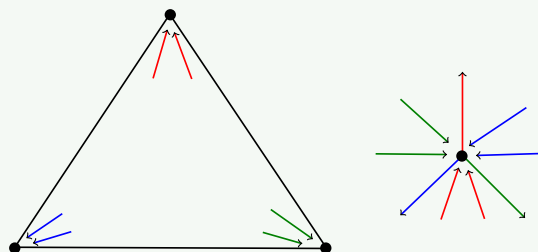
Dowód. Ustalmy rysunek planarny grafu. Do każdej ściany dodajemy wierzchołek, a następnie łączymy go ścieżką długości 2 po kolei z każdym wierzchołkiem na krawędzi ściany (być może wielokrotnie z tym samym, jeśli idąc po krawędzi ściany napotykamy go wielokrotnie – dlatego ścieżki są długości 2, bo nie pozwalamy na multikrawędzie). Teraz każda ściana jest pięciokątem. Do każdej ściany dodajemy wierzchołek i łączymy go z każdym wierzchołkiem na jej krawędzi. W ten sposób skonstruowaliśmy naszą triangulację.



Rysunek 16: Graf po pierwszym kroku konstrukcji. Oryginalne wierzchołki zaznaczone na różowo.

□

Definicja 25. Dla triangulacji G las Schnydera (Schnyder wood) to 3-kolorowanie krawędzi (kolory często oznaczamy R, G, B w tej kolejności) wraz z ich orientacją, które spełniają dwa warunki. Warunek zewnętrznego wierzchołka mówi, że dla trzech wierzchołków a_1, a_2, a_3 (wypisanych w kolejności zgodnej z ruchem wskazówek zegara) ograniczających ścianę zewnętrzną G krawędzie między nimi nie są skierowane ani pokolorowane, natomiast wszystkie krawędzie incydentne z a_i są koloru i i są skierowane do a_i . Warunek wewnętrznego wierzchołka mówi, że każdy z pozostałych wierzchołków ma po jednej wychodzącej krawędzi każdego koloru (zawsze ma 3 krawędzie, bo jest w triangulacji) a do tego te krawędzie wypisane w kolejności zgodnej z ruchem wskazówek zegara mają kolory R, G, B. Pozostałe krawędzie są wchodzące i krawędzie między wychodzącymi krawędziami o kolorach i i $i + 1$ mają kolor $i - 1$.



Rysunek 17: Warunki dla wierzchołków w lesie Schnydera.

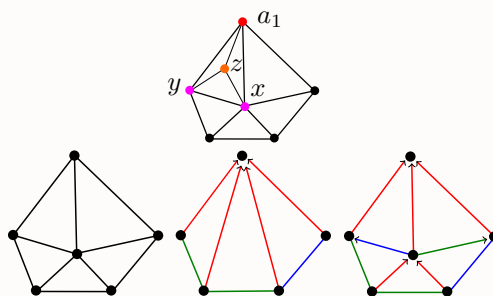
Propozycja 14. Każda triangulacja G posiada las Schnydera.

Dowód. Przeprowadzimy indukcję po liczbie wierzchołków w G . Oznaczmy ją n . Dla $n = 3$ triangulacja po prostu jest lasem Schnydera, dla $n = 4$ wystarczy odpowiednio skierować krawędzie wierzchołka wewnątrz trójkąta.

Rozważmy wierzchołek a_1 i jego sąsiada x . Niech y będzie najbardziej lewym sąsiadem x . Jeśli w trójkącie zamkniętym przez a_1yx jest wierzchołek z połączony krawędzią z a_1 i x , to zastępujemy x przez z i powtarzamy całą operację. Podobnie postępujemy dla najbardziej prawego sąsiada x . Ta procedura zatrzyma się, bo graf jest skończony.

Po wyznaczeniu naszego x kontraktujemy krawędź a_1x , dostając mniejszą triangulację. Znajdujemy jej las Schnydera z indukcji. Teraz cofamy kontrakcję. Najbardziej lewy i prawy sąsiad x są połączone z a_1 i mają wychodzącą czerwoną krawędź do a_1 . Ich krawędzie do x stają się odpowiednio niebieskie

i zielone. Pozostali sąsiedzi nie mają bezpośrednich krawędzi do a_1 , ich krawędź do x przyjmuje rolę czerwonej wychodzącej krawędzi. Krawędź a_1x jest skierowana do a_1 i czerwona. Pozostałe krawędzie pozostają jak w indukcji. Widzimy, że daje nam to poprawny las Schnydera.

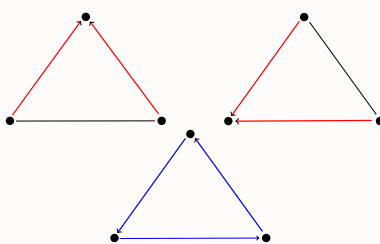


Rysunek 18: Indukcyjna konstrukcja lasu Schnydera oraz sytuacja, której unikamy.

□

Propozycja 15. Niech G będzie triangulacją z zadaniem lasem Schnydera. Niech T_i będzie zbiorem zorientowanych krawędzi koloru i . Wtedy $T_i \cup T_{i-1}^{-1} \cup T_{i+1}^{-1}$ jest acykliczny (lasy w kolorach innych niż i bierzemy z odwróconymi krawędziami).

Dowód. Nie wprost niech C będzie cyklem skierowanym. Do tego niech będzie on minimalny na liczbę ścian triangulacji, które zawierają się w jego środku. Jeśli v jest we wnętrzu regionu zamkniętego przez C , to wychodzi z niego co najmniej jedna krawędź (koloru i) i wchodzi do niego co najmniej dwie. Zatem możemy iść jakąś ścieżką od v i cofać się po jakiejś ścieżce do v . Jeśli z obu stron trafimy na C , to zamknęliśmy mniejszy cykl. Jeśli z którejś strony nie trafimy na C , to w końcu musimy wrócić do v , również zamykając mniejszy cykl. Ta sprzeczność daje nam, że C jest sumą ścian bez wierzchołków wewnętrznych (czyli indukuje graf zewnętrznie planarny). Krawędzie wewnątrz C są cięciwami, zatem można za ich pomocą stworzyć mniejszy cykl. Zatem C jest po prostu ścianą. Teraz rozpatrujemy przypadki jak na rysunku, zakładając, że i jest czerwony. Jeśli lewa krawędź jest czerwona i skierowana w górę, druga krawędź wychodząca z górnego wierzchołka musi być czerwona lub zieloną krawędzią wchodzącą (pierwsza po wchodzącej czerwonej krawędzi idąc przeciwnie do ruchu wskazówek zegara), a więc nie jest wychodząca. Pozostałe przypadki działają analogicznie.



Rysunek 19: Kolorowania C dające sprzeczność.

□

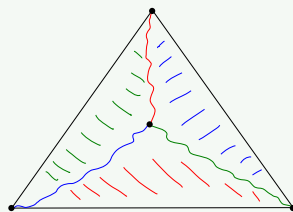
Wniosek. T_i jest acykliczne dla każdego $i \in [3]$. Do tego ma $n - 3$ krawędzie (każdy wewnętrzny wierzchołek ma dokładnie jedną wychodzącą koloru i) oraz $n - 2$ wierzchołki (każdy wierzchołek wewnętrzny i a_i należą do T_i). Zatem T_i jest drzewem.

Definicja 26. Dla triangulacji G z zadaniem lasem Schnydera dla wierzchołka x oznaczamy przez $P_i(x)$ skierowaną ścieżkę w T_i od x do a_i .

Propozycja 16. Jeśli $i \neq j$, to $P_i(x) \cap P_j(x) = \{x\}$.

Dowód. Gdyby $P_i(x), P_j(x)$ przecinały się gdzieś poza x , to zamykałyby cykl w $T_i \cup T_j^{-1}$. $\square$

Definicja 27. Dla triangulacji G z zadaniem lasem Schnydera i wierzchołka x ścieżki $P_1(x), P_2(x)$ i $P_3(x)$ dzielą cały rysunek G na trzy regiony. Przez $R_i(x)$ oznaczamy region zamknięty przez ścieżki o kolorach $i-1$ i $i+1$.



Rysunek 20: Podział grafu na trzy regiony.

Propozycja 17. Jeśli $y \in R_i(x)$, to $R_i(y) \subseteq R_i(x)$.

Dowód. Załóżmy bez straty ogólności, że i jest czerwony. Załóżmy, że y nie leży na $P_2(x) \cup P_3(x)$. Niebieska ścieżka y musi w pewnym momencie spotkać się z niebieską ścieżką x (być może w a_3). Gdyby dołączała się do niej od prawej, to wcześniej musiała wyjść z regionu $R_1(x)$. Nie mogła tego zrobić przecinając się z niebieską ścieżką, a więc przecięła się z zieloną. Wtedy jednak w miejscu przecięcia nie zgadza się warunek wewnętrznego wierzchołka – wychodząca krawędź czerwona musi być między wychodzącą niebieską i zieloną, ale wtedy wchodząca zielona krawędź jest źle umiejscowiona. Zatem niebieska ścieżka y łączy się ze ścieżką x od wnętrza regionu. Podobnie zielona, co daje odpowiednie zawieranie.

Jeśli y leży na którejś ze ścieżek x , to ta ścieżka dla y musi iść tak samo jak dla x , a dla drugiej działa ten sam argument. $\square$

Twierdzenie 8 (Schnyder 1989). Dla każdego grafu G jest $\dim(I_G) \leq 3$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest planarny.

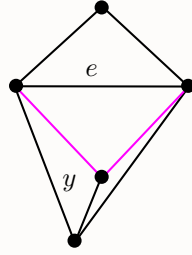
Dowód. Wynikanie w prawo już pokazaliśmy. Pozostaje wykazać drugą stronę. Załóżmy bez straty ogólności, że G jest triangulacją, bo poset incydencji G jest podposetem indukowanym pewnej triangulacji. Będziemy właściwie rozważać $\dim(G)$, bo jak wykazaliśmy pokrywa się on z $\dim(I_G)$ dla odpowiednich grafów.

Dla $i \in [3]$ niech π_i będzie liniowym porządkiem na wierzchołkach, który jest zgodny z zawieraniem regionów, to znaczy jeśli $u < v$ w π_i , to $R_i(u) \subseteq R_i(v)$. Pokażemy, że $\{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}$ realizuje G . Jeśli dla krawędzi e i wierzchołka v mamy $v \notin e$, to e musi się zawierać w którymś z regionów $R_i(v)$. Wtedy oba jej końce się w nim zawierają, a więc ich regiony są mniejsze od regionu v . Zatem znajdują się przed v w π_i . To kończy dowód. $\square$

Definicja 28. Dla triangulacji G przez $P_{VEF'}(G)$ oznaczamy poset incydencji G , w którym dodatkowo mamy ograniczone ściany triangulacji, które są nad tymi krawędziami, które do nich należą. $P_{VEF}(G)$ jest tym samym, tylko mamy wszystkie ściany. Do tego możemy zdefiniować ten napis dla wszystkich grafów planarnych (nie wymagamy jednej ściany zewnętrznej).

Twierdzenie 9. Dla triangulacji G zachodzi $\dim(P_{VEF'}(G)) \leq 3$.

Dowód. Załóżmy, że krawędź $e = ab$ uczestniczy w parze krytycznej (e, y) . Wtedy $a, b < y$, a więc y jest ścianą. Wtedy muszą istnieć krawędzie zawierające a i b zawarte w y , a to nie może zajść, bo G jest triangulacją. Zatem wszystkie pary krytyczne zawierające jakąś ścianę zawierają też wierzchołek i są postaci (v, f) , bo para (f, v) nie może być krytyczna dla wierzchołka v i ściany f .



Rysunek 21: Krawędzie, które musiałyby należeć do ściany y zaznaczone na różowo.

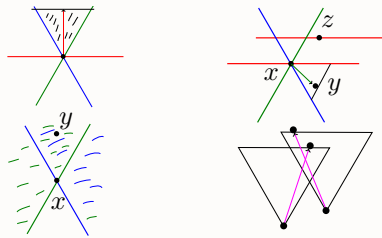
Dla $i \in [3]$ niech π_i będzie liniowym porządkiem na wierzchołkach, który jest zgodny z zawieraniem regionów, to znaczy jeśli $u < v$ w π_i , to $R_i(u) \subseteq R_i(v)$. Rozszerzamy π_1, π_2, π_3 do liniowych rozszerzeń L_1, L_2, L_3 naszego posetu poprzez umieszczenie krawędzi i ścian tak nisko jak się da. Wiemy, że te porządki odwracają wszystkie pary krytyczne niezawierające ścian. Jeśli mamy $v \notin f$, to f musi się zawierać w którymś z regionów $R_i(v)$. Wtedy wszystkie jej wierzchołki są w tym regionie, a więc ich regiony są mniejsze od regionu v . Zatem znajdują się przed v w π_i i para (v, f) jest odwracana. To pokazuje, że L_1, L_2, L_3 jest realizatorem. $\square$

Definicja 29. Dla zadanego trójkąta ABC oraz punktu x w jego wnętrzu mówimy, że (α, β, γ) są współrzędnymi barycentrycznymi x w ABC , jeśli $\alpha + \beta + \gamma = 1$ oraz $x = \alpha A + \beta B + \gamma C$, czyli ta trójką to wagi z jakimi trzeba wziąć średnią wierzchołków trójkąta, aby otrzymać x .

Twierdzenie 10 (Schnyder 1989). Graf planarny G o n wierzchołkach można zanurzyć w kratę całkowitoliczbową o boku $2n - 5$ tak, że rysunek jest planarny.

Dowód. Załóżmy bez straty ogólności, że G jest triangulacją. Dla $i \in [3]$ niech $\phi_i(x)$ oznacza liczbę ścian w $R_i(x)$. Zauważmy, że mamy $\sum_{i \in [3]} \phi_i(x) = 2n - 5$, bo tyle jest ograniczonych ścian w triangulacji (formuła Eulera daje wzór $F + V = E + 2$, a do tego mamy $3F = 2E$, bo każda ściana ma trzy krawędzie, a każda krawędź dwie ściany). Zatem po znormalizowaniu te wartości są współrzędnymi barycentrycznymi w pewnym trójkącie równobocznym. Wierzchołki zewnętrzne grafu są mapowane na wierzchołki trójkąta, a więc oznaczmy ten trójkąt RGB zgodnie z kolorami.

Pokażemy, że każda krawędź koloru i jest zamknięta w klinie ograniczonym przez proste przechodzące przez jej pierwszy wierzchołek, które są równoległe do boków trójkąta przeciwnych do wierzchołków pozostałych kolorów. Do tego rozważmy trójkąt powstały poprzez zamknięcie tego klina prostą równoległą do trzeciego boku trójkąta taką, że przechodzi ona przez drugi wierzchołek krawędzi. Wtedy wierzchołki tej krawędzi są jedynymi wierzchołkami zawartymi w takim trójkącie.



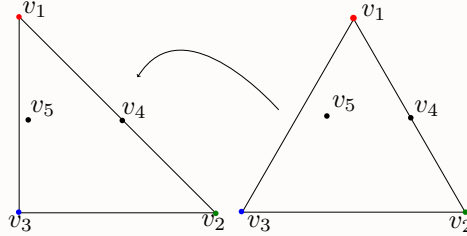
Rysunek 22: Po lewej klin z trójkątem i obszar, w którym jest krawędź. Po prawej z odgródzone od trójkąta poziomą linią i tnące się krawędzie.

Rozważmy krawędź $e = xy$ i bez straty ogólności załóżmy, że jest ona czerwona (cały trójkąt jest symetryczny). Wtedy mamy $R_G(y) \subseteq R_G(x)$, $R_B(y) \subseteq R_B(x)$, bo $y \in R_G(x), R_B(x)$ (należy do $P_R(x)$). Zatem y musi być dalej od wierzchołków G, B niż x , czyli jest w klinie.

Rozważając wierzchołek $z \notin e$ zauważmy, że musi być $e \subseteq R_i(z)$ dla pewnego i . Załóżmy bez straty ogólności, że $i = R$ (porzucamy teraz założenie, że e jest czerwona). Wtedy e leży na rysunku

poniżej z , a więc z nie może zawierać się w trójkącie e .

Założmy teraz, że krawędzie ee' się przecinają. Wtedy ich trójkąty muszą się przecinać i to w taki sposób, że kraniec jednej krawędzi leży w trójkącie drugiej – sprzeczność. Dostaliśmy zatem rysunek planarny w trójkącie równobocznym. Aby zrobić z niego rysunek na kracie rozchylamy ramiona RB i GB trójkąta tak, by kąt B stał się prosty. Krawędzie dalej się nie przecinają a współrzędne wierzchołków są wyrażone takimi samymi współrzędnymi barycentrycznymi. Zakładając $R = (0, 2n - 5)$, $G = (2n - 5, 0)$, $B = (0, 0)$ współrzędne wierzchołków to po prostu $(\phi_G(x), \phi_R(x))$. Zatem faktycznie są one całkowite.



Rysunek 23: Przejście z trójkąta równobocznego w prostokątny.

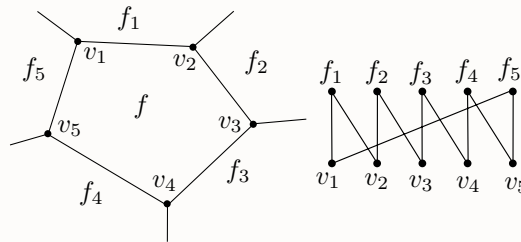
□

5. Dekompozycje separujące

2025-03-31

Propozycja 18. Niech G będzie 3-spójnym grafem planarnym. Mamy $\dim(P_{VEF}(G)) \geq 4$.

Dowód. Weźmy realizator $L_1, \dots, L_k$. Popatrzmy na najniższą postawioną w L_k ścianę. Niech będzie to f . 2-spójność daje nam, że f zamyka t -cykl (bo jej wierzchołki muszą być połączone na co najmniej dwa sposoby). Do tego każda ściana incydentna do krawędzi należącej do f zamyka cykl między wierzchołkami należącymi do tej krawędzi (z 3-spójności potrzebujemy więcej połączeń niż te z f). Zatem sytuacja wygląda jak na rysunku. Mamy $v_1, \dots, v_k < f < f_1, \dots, f_k$ w L_k , a więc L_k nie odwraca żadnej pary krytycznej w koronie na tych elementach. Zatem potrzebne są jeszcze trzy rozszerzenia (bo $t \geq 3$, czyli korona ma wymiar 3), żeby je odwrócić, czyli $k - 1 \geq 3$.



Rysunek 24: Ściana i jej sąsiedztwo.

□

Definicja 30. Mając poset $P = (X, \leq)$ definiujemy jego split-poset $\text{sp}(P)$ jako poset ze zbiorem podkładowym $X' \sqcup X''$ (rozłączne kopie X) i relacją: jeśli $x \leq y$ w P , to $x' \leq y''$ w $\text{sp}(P)$. x' i y'' to kopie x, y odpowiednio w X' i X'' .

Propozycja 19. Dla posetu P zachodzi

$$\dim(P) \leq \dim(\text{sp}(P)) \leq \dim(P) + 1.$$

Dowód. Jeśli $((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k))$ jest cyklem alternującym w P , to $((x'_1, y''_1), \dots, (x'_k, y''_k))$ jest alterujący w $\text{sp}(P)$. Mamy $\dim(P) = \chi(\mathcal{H}_P) \leq \chi(\mathcal{H}_{\text{sp}(P)}) = \dim(\text{sp}(P))$, bo każda krawędź w

pierwszym hipergrafie ma swoją odpowiadającą krawędź w drugim.

Niech $L_1, \dots, L_k$ będzie realizatorem P . Zdefiniujmy L_i^+ jako L_i , w którym każdy x został zastąpiony przez x' i x'' (w tej kolejności). Jeśli $x \parallel y$ w P , to odpowiednie pary w $\text{sp}(P)$ są odwracane przez te porządki. Zatem wystarczy rozważyć $x < y$ w P . Musimy wtedy odwrócić pary $(x', y'), (y', x'), (x'', y''), (y'', x''), (x'', y')$. Robimy to konstruując rozszerzenie L_{k+1} – najpierw (jako mniejsze) bierzemy elementy X' w kolejności odwrotnej niż w L_k , potem elementy X'' w kolejności odwrotnej niż w L_k . Ostatnia para na pewno zostanie odwrócona w tym rozszerzeniu, a pozostałe zostaną odwrócone w L_k lub L_{k+1} . $\square$

Definicja 31. Graf G jest GIGiem (Grid Intersection Graph), jeśli jest grafem przecięć pionowych i poziomych odcinków na płaszczyźnie. Do tego pionowe odcinki są parami rozłączne i poziome tak samo. GIGi są grafami dwudzielnymi. Przez Q_G oznaczamy poset powstały z przeczytania G jako posetu (linie pionowe są elementami minimalnymi, a poziome maksymalnymi).

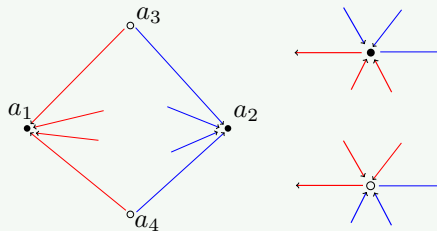
Propozycja 20. Niech G będzie GIGiem. Wtedy $\dim(Q_G) \leq 4$.

Dowód. Konstruujemy cztery liniowe rozszerzenia L_W, L_N, L_E, L_S (kierunki świata). Przy konstrukcji L_O zamykamy płaszczyznę w kierunku O – dokładamy kolejne elementy do naszego porządku, minimalne dokładamy, gdy pierwszy raz się z nimi zetknijemy, a maksymalne, gdy ostatni. Są to poprawne liniowe rozszerzenia. Pary złożone z równoległych odcinków oczywiście zostaną odwrócone, natomiast pary złożone z prostopadłych, rozłącznych odcinków również zostaną odwrócone (łatwo sobie to wyobrazić geometrycznie). Zatem skonstruowaliśmy realizator. $\square$

Definicja 32. Maksymalny dwudzielny graf planarny nazywamy kwadrangulacją (wszystkie ściany są czworokątami). Każdy dwudzielny graf planarny jest podgrafem indukowanym pewnej kwadrangulacji (dowód jak dla triangulacji, ale dodajemy krawędzie do wierzchołków tylko jednego koloru).

Definicja 33. Dekompozycja separująca kwadrangulacji G to orientacja i 2-kolorowanie (kolory R, B) krawędzi G spełniające dwa warunki. Warunek wierzchołka zewnętrznego mówi, że dla czterech wierzchołków a_1, a_2, a_3, a_4 ograniczających ścianę zewnętrzną G istnieją dwa niesąsiadujące takie, że wszystkie krawędzie połączone z jednym są R, a wszystkie połączone z drugim są B. Do tego są one skierowane do tego wierzchołka. Przyjmujemy, że są to a_1, a_2 (lewy i prawy, czerwony i niebieski) i nazywamy je wyróżnionymi bądź czarnymi. Wierzchołki należące do tego samego co one zbioru w podziale grafu dwudzielnego na zbiory niezależne również nazywamy czarnymi. Analogicznie a_3, a_4 (górny i dolny) to wierzchołki niewyróżnione i białe.

Warunek wierzchołka wewnętrznego mówi, że każdy z pozostałych wierzchołków (w tym również a_3, a_4) ma po jednej wychodzącej krawędzi każdego koloru. Pozostałe krawędzie są wchodzące i dla wierzchołków czarnych są one pokolorowane tak, że krawędzie między czerwoną wychodzącą krawędzią a niebieską (w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara) są pokolorowane na czerwono. Dla białych wierzchołków zachodzi to samo, tym razem patrząc w kierunku zgodny z ruchem wskazówek zegara.



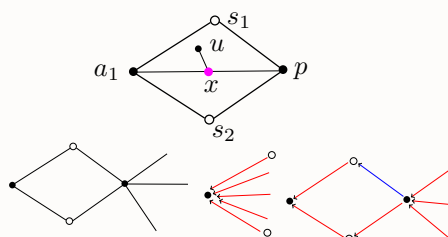
Rysunek 25: Warunki dla wierzchołków w dekompozycji separującej.

Propozycja 21. Każda kwadrangulacja G ma dekompozycję separującą.

Dowód. Przeprowadzimy indukcję po liczbie wierzchołków w G . Dla $n = 4$ wystarczy dobrze pokolorować krawędzie czworokąta. Jeśli w G jest wierzchołek stopnia 2, to można go usunąć (dalej

będzie to kwadrangulacja, bo krawędzie incydentne do tego wierzchołka muszą leżeć na tych samych ścianach), indukcyjnie stworzyć strukturę dla mniejszej kwadrangulacji, dodać ten wierzchołek i odpowiednio skierować i pokolorować jego krawędzie. Trochę więcej uwagi wymaga przypadek, gdy usuwany wierzchołek jest zewnętrzny. Wtedy musimy dać mu dwie krawędzie wchodzące i pokolorować krawędzie wierzchołka, który przyjął rolę zewnętrznego. Dalej przyjmujemy, że nie ma wierzchołków stopnia 2.

Rozważmy zewnętrzny wierzchołek a_1 i wierzchołek p , z którym tworzy on czworokąt, ale nie sąsiaduje. Ustalmy wierzchołki s_1, s_2 – dwóch najbardziej zewnętrznych wspólnych sąsiadów a_1 i p (czyli takich, że każdy czworokąt zawierający a_1, p zawiera się w $a_1 s_1 p s_2$). Jeśli a_1 i p mają innego wspólnego sąsiada niż s_1, s_2 (powiedzmy x), to ma on trzeciego sąsiada u . Załóżmy, że leży on w $a_1 x p s_1$. Wtedy można znaleźć w tym czworokącie nowy wierzchołek, który spełnia te same warunki, co p (być może u , ale niekoniecznie). Powtarzamy taką konstrukcję, aż nie będziemy mogli znaleźć odpowiedniego x . Kontraktujemy p do a_1 , indukcyjnie znajdujemy dekompozycję separującą, a następnie cofamy kontrakcję i odpowiednio kolorujemy niepokolorowane krawędzie o końcu w p .



Rysunek 26: Indukcyjna konstrukcja dekompozycji separującej.

□

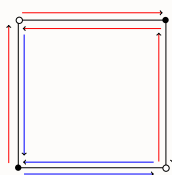
Propozycja 22. Niech G będzie kwadrangulacją zadaną dekompozycją separującą. Niech T_i będzie zbiorem zorientowanych krawędzi koloru i . Wtedy $T_i \cup T_{i+1}^{-1}$ jest acykliczny.

Dowód. Nie wprost niech C będzie cyklem skierowanym minimalnym na liczbę ścian w nim zawartą. Jeśli v jest we wnętrzu regionu zamkniętego przez C , to ma co najmniej jedną krawędź wchodzącą i wychodzącą, a więc można iść jakąś ścieżką z v i cofać się po jakieś ścieżce do v . Jeśli z obu stron trafimy na C , to zamknęliśmy mniejszy cykl. Jeśli nie, to zamknijemy mniejszy cykl wewnątrz C . Podobnie jeśli C ma cięciwę, to tworzy ona mniejszy cykl. Zatem C jest ścianą, ale rozważając przypadki można pokazać, że ściana nie może być cyklem, jeśli krawędzie są odpowiednio skierowane i pokolorowane. □

Wniosek. T_i jest acykliczne, a do tego ma o jedną krawędź mniej niż wierzchołków (tylko z wierzchołkiem zewnętrznego nie wychodzi krawędź). Zatem jest drzewem.

Propozycja 23. Każda ściana dekompozycji separującej ma dokładnie dwa wierzchołki, w których spotykają się krawędzie (tej ściany) o różnych kolorach.

Dowód. Dowód przez sprawdzenie przypadków. Zaczynamy ustalając jakąś krawędź i z warunków dekompozycji dostajemy, jakie kolory muszą mieć pozostałe.



Rysunek 27: Jeśli górna krawędź jest czerwona, to sytuacja wygląda jak na rysunku.

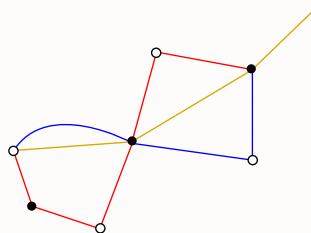
□

Definicja 34. Krzywa separująca ściany to krzywa (wewnątrz ściany) łącząca wierzchołki, w których spotykają się krawędzie różnych kolorów. Sumę wszystkich krzywych separujących S nazywamy krzywą separującą dekompozycji.

Uwaga. Z warunku wewnętrznego wierzchołka wynika, że każdy wierzchołek wewnętrzny jest incydentny do dokładnie dwóch krzywych separujących (idąc zgodnie z ruchem wskazówek zegara dookoła wierzchołka mamy dokładnie dwie zmiany kolorów krawędzi), a niewyróżnione wierzchołki zewnętrzne do jednej. Zatem S jest sumą cykli i jednej ścieżki.

Propozycja 24. S jest ścieżką.

Dowód. Zauważmy, że jeśli krzywa separująca przechodzi przez jakiś wierzchołek wewnętrzny, to wszystkie jego krawędzie danego koloru są po tej samej stronie tej krzywej (a pozostałe po drugiej). Inaczej krawędzie występowałyby na zmianę, a to nie może zajść, bo nie można wtedy spełnić warunku wierzchołka wewnętrznego.

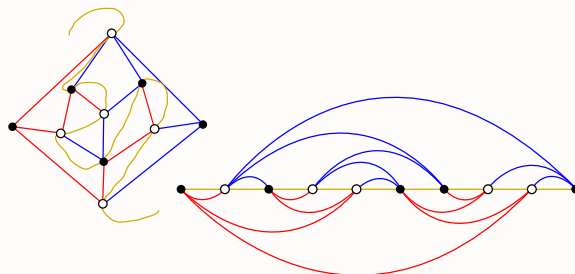


Rysunek 28: Różne kolory po tej samej stronie krzywej separującej dają sprzeczność.

Założmy nie wprost, że na S jest cykl. Wtedy wszystkie krawędzie wewnątrz cyklu są jednego koloru, a na zewnątrz drugiego (bo cykl musi składać się z wierzchołków wewnętrznych). Wtedy jednak pokolorowany wierzchołek zewnętrzny musi być wewnątrz tego cyklu (idąc krawędziami danego koloru dojdziemy do niego i nie wyjdziemy z cyklu), co daje sprzeczność – nie może być wewnątrz cyklu, bo ten cykl znajduje się w regionie zamkniętym przez ścianę zewnętrzną. $\square$

Lemat 10. Każdy dwudzielny graf planarny ma reprezentację przez dotykające się odcinki pionowe i poziome.

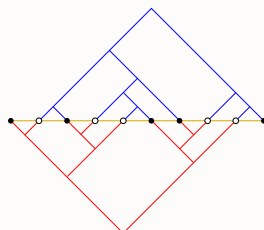
Dowód. Wystarczy pokazać tezę dla kwadrangulacji. Rozważmy dekompozycję separującą naszej kwadrangulacji. Wypiszmy jej wierzchołki w kolejności występowania na krzywej separującej (zaczynając od górnego wierzchołka zewnętrznego i dodając na końcu wyróżnione wierzchołki zewnętrzne). Następnie połączmy wypisane wierzchołki za pomocą krawędzi grafu tak, że czerwone krawędzie są pod rysunkiem, a niebieskie nad. Nie będą się one przecinać, bo graf jest planarny a jednokolorowe krawędzie znajdują się po tej samej stronie krzywej separującej.



Rysunek 29: Wierzchołki po „wyprostowaniu” krzywej separującej.

Na takim rysunku wszystkie krawędzie tego samego koloru wychodzące z danego wierzchołka są zwrócone w tę samą stronę (i w przeciwną niż krawędzie drugiego koloru). Wynika to z faktu, że

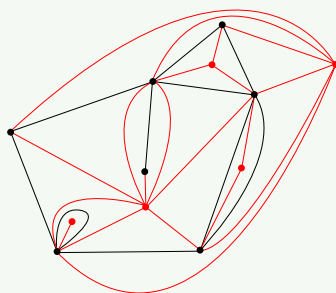
(patrząc od góry) jeśli krzywa odwiedza biały wierzchołek, to musiała wcześniej odwiedzić wszystkich jego sąsiadów, do których prowadzą czerwone krawędzie – nie będzie miała już okazji ich odwiedzić, bo krzywa i czerwona ścieżka od wierzchołka do wierzchołka zewnętrznego zamykają region, do którego krzywa już nie może wejść. Mogłoby się zdarzyć, że jeden z sąsiadów jest na brzegu tego regionu, a nie wewnątrz. Wtedy jednak nie spełnia on warunku wierzchołka wewnętrznego. Analogicznie dla czarnych. Możemy zamienić łuki na odcinki jak na rysunku poniżej. Czerwone i niebieskie odcinki wychodzące z danego wierzchołka są skierowane w przeciwne strony, więc razem tworzą odcinek. Po obrocie w lewo jest to dokładnie taka reprezentacja, jakiej szukamy.



Rysunek 30: Łuki zamienione na odcinki tworzą szukaną reprezentację.

□

Definicja 35. Dla M będącego multigrafem planarnym rozważamy multigraf $A(M)$ nazywany grafem na kątach. W $A(M)$ wierzchołkami są wierzchołki i ściany M , a krawędź między nimi jest wtedy, gdy wierzchołek leży na krawędzi ściany (mogą wystąpić multikrawędzie – mamy jedną krawędź dla każdego kąta ściany).



Rysunek 31: Graf na kątach utworzony przez czerwone krawędzie.

Uwaga. Jak M nie ma wierzchołka stopnia 1, multikrawędzi ani pętli, to $A(M)$ jest kwadrangulacją. Wynika to z faktu, że wtedy każde dwa wierzchołki połączone krawędzią są incydentne do pewnych dwóch ścian i tworzą z nimi czworokąt.

Twierdzenie 11 (Brightwell, Trotter 1997). Niech G będzie planarnym multigrafem. Wtedy

$$\dim(P_{VEF}(G)) \leq 4.$$

Dowód. Pokażemy $\dim(\text{sp}(P_{VEF}(G))) \leq 4$, co da tezę. Na początek założmy, że G nie ma wierzchołków stopnia 1, multikrawędzi ani pętli. Wtedy $A(G)$ jest kwadrangulacją (i reprezentuje P_{VF}). Ma ona więc reprezentację przez dotykające się odcinki, która w szczególności jest GIGiem. Będziemy chcieli dorzucić do takiego posetu zesplitowane krawędzie. Każda krawędź e jest nad dwoma wierzchołkami i pod dwoma ścianami. Te cztery elementy tworzą prostokąt w naszej reprezentacji przez odcinki. Dokładamy do niej e' i e'' jako przecinające się odcinki wewnątrz tego prostokąta, z których pierwszy ma końce w bokach będących ścianami, a drugi wierzchołkami. Taki poset jest GIGiem, a więc ma wymiar ograniczony przez 4.

Pozostaje dokonać splitu wierzchołków i ścian. Dla wierzchołka v i ściany f elementy v' i f'' mają takie same porównywalności jak oryginalne elementy (bo wierzchołki są minimalne a ściany maksy-

malne). Zatem można je umieścić w reprezentacji jako GIG w miejsce oryginalnych elementów. v'' i f' są porównywalne tylko z odpowiednio v' i f'' , a więc można je reprezentować odcinkiem, który przecina się tylko z tym jednym elementem.

Pozostało nam poradzić sobie z niekwadrangulacjami. Jeśli G ma pętle lub multikrawędzie, to wystarczy dodać w ich środek nowy wierzchołek i podzielić na dwie. Dla każdego wierzchołka stopnia 1 można stworzyć nowy wierzchołek i połączyć go z tym wierzchołkiem i jego jedynym sąsiadem. Poset incydencji takiego grafu jest nadposetem oryginalnego grafu, a jego graf na kątach jest kwadrangulacją. $\square$

6. Porządki przedziałowe

2025-04-07

Definicja 36. Poset P jest równoprzedziałowy (semi-order) jeśli P jest przedziałowy oraz ma reprezentację przedziałową, w której wszystkie przedziały mają tę samą długość.

Lemat 11. Niech P będzie posetem. Następujące warunki są równoważne.

1. P jest równoprzedziałowy.
2. P ma reprezentację w której żadne dwa przedziały się ściśle nie zawierają.
3. P jest $(2+2)$ -wolny i $(3+1)$ -wolny.
4. Istnieje L będące liniowym rozszerzeniem P takie, że jeśli $x < y$ w L , to $D(x) \subseteq D(y)$ i $U(y) \subseteq U(x)$.

Dowód. $(1 \implies 2)$ Jeśli w reprezentacji równoprzedziałowej mamy zawierające się przedziały, to są sobie równe. Wtedy mają te same upsety i downsety. Można lekko poprzesuwać takie przedziały tak, aby nie zmieniły się żadne porównywalności i przedziały stały się różne.

$(2 \implies 3)$ Pierwszą część już wiemy. Jeśli w P mamy $3+1$, to elementy tworzące 3 są trzema rozłącznymi przedziałami. Element tworzący 1 przecina się niepusto z pierwszym i trzecim z nich, a więc musi w pełni zawierać drugi – sprzeczność.

$(3 \implies 4)$ Wiemy, że istnieje liniowe rozszerzenie L takie, że jeśli $x < y$ w L , to $D(x) \subseteq D(y)$. Rozważmy $x, y : x < y$ w L i $U(y) \not\subseteq U(x)$ (więc $U(x) \subsetneq U(y)$), czyli istnieje $z \in U(y) \setminus U(x)$. Mamy $y \parallel x$ (inaczej upsety by się zgadzały) i $z \parallel x$ (z nie jest pod x , bo jest wyżej w L). Jeśli istnieje $w \in D(y) \setminus D(x)$, to mamy $3+1$, zatem $D(x) = D(y)$ i downsety wszystkich elementów pomiędzy x i y w L są takie same (więc wszystkie te elementy są nieporównywalne). Zatem można zamienić miejscami x i y nie psując własności L . Do tego zwiększamy liczbę zgadzających się upsetów. Zatem w końcu dostaniemy liniowe rozszerzenie spełniające tezę.

$(4 \implies 1)$ Skonstruujemy indukcyjnie reprezentację równoprzedziałową, w której początki i końce przedziałów są ułożone (jednocześnie) zgodnie z porządkiem zadany przez L . Przypadek dla jednego elementu jest trywialny. Rozważmy teraz co najmniej 2-elementowe P . Zauważmy najpierw, że możemy założyć, że każde dwa elementy P mają różny upset lub downset, bo inaczej można im przypisać dokładnie ten sam przedział, a więc w konstrukcji wystarczy rozważyć jeden z nich. Niech z będzie największym elementem L . Indukcyjnie tworzymy reprezentację dla $P \setminus \{z\}$ (korzystając z rozszerzenia $L \setminus \{z\}$). Niech z' będzie poprzednikiem z w L . z i z' mają różne downsety (bo jeśli upsety się różnią, to $z \in U(z')$, czyli $z' \in D(z)$). Zauważmy, że $x \in D(z)$ implikuje $y \in D(z)$ dla każdego $y < x$ w L . Spośród elementów przecinających z' kilka kończących się najwcześniej jest pod z . Zatem można rozpocząć z zaraz za ostatnim z tych przedziałów. z będzie się przecinać z wszystkimi elementami przecinającymi się z z' , które kończą się później, a to są wszystkie elementy, z którymi z powinien się przecinać. Z równości przedziałów z skończy się za z' , więc niezmiennik naszej konstrukcji jest zachowany. To kończy dowód. $\square$

Propozycja 25. Niech $n \in \mathbb{N}$. Liczba nieetykietowanych n -elementowych porządków równoprzedziałowych wynosi $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Dowód. Niech P będzie n -elementowym posetem równoprzedziałowym. Niech $L = x_1 \dots x_n$ będzie jego rozszerzeniem liniowym takim, że $x < y$ w L implikuje $D(x) \subseteq D(y)$ i $U(y) \subseteq U(x)$. Niech

M będzie macierzą porównywalności P , czyli

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i < x_j \text{ w } P \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}.$$

Jeśli $m_{ij} = 1$, to dla $k > j$ mamy $m_{ik} = 1$, bo inaczej $x_i < x_j$ i $x_i \parallel x_k$, ale $D(x_j) \subseteq D(x_k)$. Podobnie dla $k < i$ mamy $m_{kj} = 1$, bo $x_i < x_j$ i $x_j \parallel x_k$ nie zgadza się z $U(x_i) \subseteq U(x_k)$. Zatem granica jedynek i zer w M tworzy „schodki”, które idą w prawo i w dół i nigdy nie przekraczają przekątnej (bo nie zachodzi $x_i < x_i$). Takie obiekty to kratowe ścieżki Dycka i są zliczane przez liczby Catalana.

Zauważmy, że w teorii nasza macierz mogłaby zależeć od wyboru L . Jednak L mógłby zmienić kolejność tylko na wierzchołkach o takich samych up-setach i down-setach, a więc macierz wyglądałaby identycznie, gdyby zamienić je miejscami. $\square$

Definicja 37. Niech P będzie posetem przedziałowym o zadanej reprezentacji przedziałowej $I = \{[a_x, b_x] : x \in P\}$. Funkcja znakująca (marking function) $m : P \rightarrow \mathbb{R}$ to iniektywna funkcja taka, że $m(x) \in [a_x, b_x]$. Możemy za jej pomocą zdefiniować liniowe rozszerzenie L_m , w którym $x < y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m(x) < m(y)$.

Propozycja 26. Niech P będzie porządkiem przedziałowym i niech A, B będą rozłącznymi podzbiórami elementów P . Wtedy P posiada jedno liniowe rozszerzenie L takie, że L odwraca wszystkie pary w $\text{Inc}(A \times B)$.

Dowód. Ustalmy rozróżniającą reprezentację przedziałową P (taką, w której końce się nie pokrywają). Definiujemy funkcję znakującą m tak, że dla elementów A wybieramy prawy koniec, dla B lewy, a na pozostałych dowolnie (byle by było iniektywne). Jeśli para $(a, b) \in A \times B$ jest nieporównywalna, to przedziały się przecinają, a więc koniec pierwszego leży przed początkiem drugiego. To znaczy, że para jest odwracana. $\square$

Wniosek. Dla posetu przedziałowego zachodzi $\dim(P) = O(\log n)$. Możemy ponumerować elementy liczbami binarnymi, definiujemy A_i, B_i jako te elementy, których liczby na i -tej pozycji mają odpowiednio 0 i 1. Takich par jest $\log n$, nieporównywalne pary z każdej odwracamy za pomocą 2 rozszerzeń.

Propozycja 27. Niech P będzie porządkiem równoprzedziałowym. Wtedy $\dim(P) \leq 3$.

Dowód. Ustalmy rozróżniającą reprezentację równoprzedziałową $I = \{[a_x, a_x + 1] : x \in P\}$, w której żaden koniec przedziału nie jest liczbą całkowitą. Dzielimy elementy na dwa rozłączne zbiory

$$A = \{x \in P : [a_x, a_x + 1] \text{ zawiera liczbę parzystą}\},$$

$$B = \{x \in P : [a_x, a_x + 1] \text{ zawiera liczbę nieparzystą}\}.$$

Wiemy, że istnieją liniowe rozszerzenia L_1 i L_2 , które odwracają wszystkie pary pomiędzy A i B . Zostają pary elementów zawierających liczbę całkowitą tej samej parzystości (czyli tę samą liczbę, bo muszą się przecinać). Niech $z_0, \dots, z_k$ będą kolejnymi liczbami całkowitymi należącymi do któregoś z przedziałów z I . W rozszerzeniu liniowym L_3 najpierw kładziemy elementy zawierające z_0 w kolejności odwrotnej niż w L_1 , potem powtarzamy to samo dla kolejnych liczb aż do z_k (potem dodajemy resztę elementów dowolnie). Widzimy, że $\{L_1, L_2, L_3\}$ jest realizatorem. $\square$

Uwaga. To ograniczenie jest najlepsze możliwe, bo pajak jest równoprzedziałowy.

Propozycja 28. Niech P będzie n -elementowym porządkiem przedziałowym. Wtedy $P \subseteq_{\text{ind}} U_{2n}$.

Dowód. Możemy wypisać wszystkie końce przedziałów od lewej do prawej, a następnie pozbyć się istniejących przedziałów i przypisać końcom kolejno liczby od 1 do $2n$. Tak otrzymane przedziały tworzą P i zawierają się w U_{2n} . $\square$

Twierdzenie 12 (Füredi, Hajnal, Rödl, Trotter 1991). Niech P będzie n -elementowym porządkiem przedziałowym. Wtedy

$$\dim(P) = O(\log \log n).$$

Dowód. Niech $N(w) = \min \left\{ t \in \mathbb{N} : \binom{t}{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} \geq w \right\}$. Przyjmijmy $t = N(\log n)$, $s = \binom{t}{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}$. Korzystając z szacowania $\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ dostajemy

$$\begin{aligned} \log n &\geq \binom{t-1}{\lfloor \frac{t-1}{2} \rfloor} = \frac{(t-1)!}{\lfloor \frac{t-1}{2} \rfloor! \lceil \frac{t-1}{2} \rceil!} \geq \frac{1}{e^2 \sqrt{\lfloor \frac{t-1}{2} \rfloor \lceil \frac{t-1}{2} \rceil}} \frac{(t-1)^{t-1} 2^{\lfloor \frac{t-1}{2} \rfloor} 2^{\lceil \frac{t-1}{2} \rceil}}{(t-1)^{\lfloor \frac{t-1}{2} \rfloor} (t-1)^{\lceil \frac{t-1}{2} \rceil}} \\ &= \frac{1}{e^2 \sqrt{\lfloor \frac{t-1}{2} \rfloor \lceil \frac{t-1}{2} \rceil}} 2^{t-1} \geq \frac{1}{e^2 t} 2^{t-1}, \end{aligned}$$

czyli $\log \log n \geq -2 \log e + t - 1 - \log t$. Zatem

$$t \leq \log \log n + 1 + 2 \log e + \log t \leq \log \log n + 1 + 2 \log e + \log(\log \log n + 1 + 2 \log e + \log t).$$

Ostatecznie $t = O(\log \log n)$. Zatem wystarczy pokazać, że $\dim(U_n) \leq N(\log n) + 3$. To da nam ograniczenie $\dim(P) \leq N(\log 2n) + 3$. Niech L_{left} będzie liniowym rozszerzeniem P , w którym bierzemy przedziały w kolejności rosnących lewych końców. W przypadku remisu jako pierwsze bierzemy te o większym prawym końcu. Analogicznie definiujemy L_{right} – najpierw w kolejności rosnących prawych końców, w przypadku remisu bierzemy większy lewy koniec. Łatwo zauważyć, że odwracamy tak wszystkie pary zawierających się przedziałów.

Jeśli przedział x zaczyna się przed y i się z nim nachodzi (nie zawiera), to chcemy odwrócić (x, y) – parę (y, x) odwraca L_{left} . Oznaczmy zbiór takich par przez S . Pokażemy, że $S' \subseteq S$ jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{k-1}, x_k) \in S'$ zachodzi $(x_1, x_k) \in S$.

Jeśli L odwraca S' , to musi być $x_k < \dots < x_1$ w L . Lewy koniec x_{i+1} jest na prawo od lewego końca x_i . Zatem lewy koniec x_k jest na prawo od lewego końca x_1 . Jeśli się przecinają, to $(x_1, x_k) \in S$. W przeciwnym wypadku mamy $x_1 < x_k$ w P – sprzeczność.

Dla dowodu nie wprost drugiej strony zakładamy, że $P \cup S'^{-1}$ ma cykl prosty. Zauważmy, że kilka krawędzi pod rząd z P można zastąpić jedną z przechodniości. Podobnie kilka krawędzi pod rząd z S'^{-1} można zastąpić jedną z S^{-1} z naszego założenia. W rezultacie dostajemy cykl, w którym na zmianę są krawędzie z P i S^{-1} (oczywiście nie z tylko jednego). Niech $x_1 x_2 x_3 x_4$ będą kolejnymi elementami cyklu (nie ma cykli o 2 lub 3 elementach) i niech $x_1 x_2$ łączy krawędź z P . Początek x_2 jest za końcem x_1 . Następnie początek x_3 jest przed początkiem x_2 , a koniec przed końcem. Początek x_4 jest za końcem x_3 . Widzimy, że początek x_2 jest przed początkiem x_4 i tak dalej dla kolejnych elementów cyklu – elementy parzyste zaczynają się coraz dalej. To nie może zachodzić cyklicznie.

Wracamy do właściwego dowodu. Rozważmy różne wektory $f^{(1)}, \dots, f^{(n)}$ z $\{0, 1\}^s$ (istnieją, bo $n \leq 2^s$) posortowane leksykograficznie. Ustalmy parami różne $M_1, \dots, M_s \in \binom{[t]}{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}$. Podzielimy S na odwracalne $S_0, \dots, S_t$. Rozważmy parę $(x, y) \in S$. Będziemy patrzeć na kolejne wektory $f^{(a_x)}, f^{(a_y)}, f^{(b_x)}, f^{(b_y)}$, gdzie a_x i b_x to odpowiednio początek i koniec x . Zauważmy, że wypisaliśmy je w kolejności rosnących indeksów. Niech $d(x)$ oznacza pierwszy wiersz, w którym wektory $f^{(a_x)}$ i $f^{(b_x)}$ się różnią.

Rozważmy pierwszy wiersz, w którym nasze cztery wektory się różnią. Wektory są posortowane leksykograficznie, a więc kolejno wypisane wartości z tych wierszy mogą wyglądać na trzy sposoby: 0001, 0011, 0111. Jeśli jest to 0011, to mamy $d(x) = d(y)$, bo różnią się właśnie w tym wierszu. Umieszczamy wtedy (x, y) w S_0 . W przeciwnym wypadku wybieramy $c \in M_{d(y)} \setminus M_{d(x)}$ (zauważmy, że taki zbiór zawsze jest niepusty) i umieszczamy (x, y) w S_c .

Pokażemy, że $(x, y), (y, z) \in S_0$ implikuje $(x, z) \in S_0$, co da nam odwracalność. Mamy $d(x) = d(y) = d(z)$. Popatrzmy na ten wiersz, gdzie wszystkie właśnie rozważane pary wektorów się różnią.

Mamy $a_x < a_y < b_x$ oraz $a_y < a_z < b_y$. Jednocześnie $f^{(b_x)}$ przyjmuje w rozważanym wierszu wartość 1, a $f^{(a_z)}$ przyjmuje 0. Z tego wynika $a_z < b_x$, a więc $(x, z) \in S_0$.

Założmy, że $(x, y), (y, z) \in S_i$. Mamy wtedy $i \in M_{d(y)} \setminus M_{d(x)}$ oraz $i \in M_{d(z)} \setminus M_{d(y)}$. Sprzeczność. Zatem warunek na odwracalność S_i jest pusto spełniony. To pokazuje, że znaleźliśmy podział na zbiory odwracalne i kończy dowód. $\square$

7. Podposety przedziałowe

2025-04-14

Definicja 38. Graf G nazywamy grafem nachodzeń przedziałów, jeśli jego wierzchołkom można przypisać przedziały w taki sposób, że między przedziałami $[a, b]$ i $[c, d]$ jest krawędź wtedy i tylko wtedy, gdy $a < c < b < d$ lub $c < a < d < b$. Jest to graf przecięć niebędących zawieraniem.

Uwaga. Suma przedziałów tworzących ścieżkę w grafie nachodzeń jest przedziałem. Zatem w spójnym grafie nachodzeń suma wszystkich przedziałów jest przedziałem.

Propozycja 29. Niech G będzie spójnym grafem nachodzeń. Niech I będzie jego rozróżniającą reprezentacją. Niech $r \in V(G)$ będzie wierzchołkiem (zwanym korzeniem) o najwcześniejszym lewym końcu. Dla $d \geq 1$ niech H będzie spójnym podgrafem G takim, że $d_G(r, x) = d$ dla każdego $x \in V(H)$. Wtedy dla każdego x w H istnieje y w G taki, że $d_G(r, y) = d - 1$ i $xy \in E(G)$ oraz $I(y) \not\subseteq I_H = \bigcup_{z \in V(H)} I(z)$.

Dowód. Ustalmy wierzchołek $x \in V(H)$. Niech o $d_G(r, x) = d$ świadczy ścieżka $rv_1 \dots v_{d-1}x$. Mamy $d_G(r, v_{d-1}) = d - 1$ oraz $v_{d-1}x \in E(G)$. Pokażemy, że $I(v_{d-1}) \not\subseteq I_H$, co właściwie znaczy, że te przedziały się nachodzą (bo $I(v_{d-1})$ przecina się z $I(x) \subseteq I_H$). Rozważana ścieżka zaczyna się w $r \notin V(H)$, a kończy w $x \in V(H)$. Zatem istnieje v_i , które nie jest w $V(H)$, ale v_{i+1} już jest. Założmy nie wprost, że $i \leq d - 2$. Wtedy jeden z końców v_i przecina się z I_H , a więc z jakimś $u \in V(H)$. Wtedy jednak $d_G(r, u) \leq d - 2 + 1 = d - 1$, czyli sprzeczność. Zatem $i = d - 1$ i mamy naszą tezę. $\square$

Definicja 39. Niech P będzie posetem przedziałowym o rozróżniającej reprezentacji I . Niech S będzie zbiorem nieporównywalnych w P par (x, y) , takich, że x zaczyna się przed y i na niego nachodzi. Przez $\dim^*(I)$ oznaczamy liczbę liniowych rozszerzeń P potrzebnych do odwrócenia S .

Uwaga. Pokazaliśmy wcześniej, że $\dim^*(I) \leq \dim(P) \leq 2 + \dim^*(I)$.

Propozycja 30. Niech P będzie posetem przedziałowym o rozróżniającej reprezentacji I . Zachodzi następujące.

1. Niech $I_1, \dots, I_s$ będą podzbiórmi I indukującymi spójne składowe jego grafu nachodzeń G . Wtedy $\dim^*(I) = \max_{i \in [s]} \dim^*(I_i)$.
2. Niech X_1, X_2 będzie podziałem I . Wtedy $\dim^*(I) \leq 2 + \max_{i \in [2]} \dim^*(X_i)$.

Dowód. (1) Rozważmy liniowe rozszerzenie I_j i zauważmy, że odpowiada ono pewnej funkcji znakującej – idziemy po przedziałach w kolejności liniowego rozszerzenia i znakujemy ich punkty, za każdym razem wybierając najbliższy możliwy punkt na prawo od poprzedniego (formalnie przedziały są ciągle, ale można ustalić „krok” na minimalną odległość między końcami przedziałów podzieloną przez liczbę przedziałów). Odległość ostatnio oznakowanego punktu do początku pewnego już rozważanego przedziału jest mniejsza niż minimalna odległość między końcami przedziałów. Zatem koniec aktualnie rozważanego przedziału musi leżeć na prawo od ostatnio oznakowanego punktu, bo inaczej cały przedział leżałby na lewo od pewnego już rozważanego przedziału i byłby pierwszy w posecie. Czyli istnieje punkt, który możemy oznaczyć.

Mając funkcje znakujące dla rozłącznych rodzin przedziałów można je zsumować, dostając funkcję znakującą dla całej rodziny. Zatem dostajemy $\max_{i \in [s]} \dim^*(I_i)$ funkcji znakujących, których rozszerzenia liniowe odwracają odpowiednie pary i świadczą o odpowiedniej równości.

(2) Za pomocą dwóch liniowych rozszerzeń możemy odwrócić wszystkie nieporównywalne pary z $X_1 \times X_2$ i $X_2 \times X_1$, a pozostałe odwracamy analogicznie jak przedtem. $\square$

Definicja 40. Poset T o zbiorze podkładowym $\{x_1, \dots, x_n\} \cup \{y_{j,k} : 1 \leq j < k \leq n\}$ nazywamy n -gąszczem (thicket), jeśli $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ w T oraz $x_i < y_{j,k} \iff i < j < k$ i $y_{j,k} < x_i \iff j < k < i$.

Propozycja 31. Niech P będzie posetem przedziałowym. Jeśli $T \subseteq_{\text{ind}} P$ dla pewnego $(3n)$ -gąszczy T , to $U_n \subseteq_{\text{ind}} P$.

Dowód. Pokażemy, że jeśli element gąszczy $y_{3i-1,3j}$ utożsamimy z przedziałem $[i, j]$ z U_n , to otrzymamy U_n jako podposet indukowany T , co da nam tezę.

Jeśli $[i, j] < [k, \ell]$, to $j < k$. Mamy $3j+2 = 3(j+1)-1 \leq 3k-1$, a więc $y_{3i-1,3j} < x_{3j+1} < y_{3k-1,3\ell}$. Jeśli $[i, j] \parallel [k, \ell]$, to można założyć $k \leq j$ i $j \leq \ell$. Zatem $x_{3j}, x_{3j-1} \parallel y_{3i-1,3j}, y_{3k-1,3\ell}$. Mamy $x_{3j-1} < x_{3j}$, a P jest $(2+2)$ -wolny, więc $y_{3i-1,3j} \parallel y_{3k-1,3\ell}$. To kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 13 (Kierstead, Trotter 2000). Niech $m \geq 2$ i niech P będzie posetem przedziałowym z rozróżniającą reprezentacją I . Jeśli $\dim^*(I) \geq 6m - 10$, to P zawiera m -gąszcz jako podposet indukowany.

Dowód. Przeprowadzimy indukcję po m . Dla $m = 2$ mamy $\dim^*(I) \geq 2$, a 2-gąszcz to po prostu $2+1$. Jeśli P nie zawiera $2+1$, to w I mamy kilka rodzin przedziałów takich, że wszystkie przedziały w jednej rodzinie się przecinają i są rozłączne z pozostałymi rodzinami. Jest tak, bo jeśli pewne dwa przedziały są rozłączne i mamy trzeci przedział przecinający się z jednym z nich, to nie może przecinać się z drugim, bo razem tworzyłyby $2+1$. Te rodziny są spójnymi składowymi grafu nachodzeń I (jedna rodzina może zawierać kilka składowych, ale to nie problem). Do tego każda z nich ma wymiar co najwyżej 1, bo można ułożyć nachodzące na siebie przedziały w kolejności malejących końców. Zatem $\dim^*(I) \leq 1$ – sprzeczność. Dalej zakładamy $m \geq 3$.

Możemy założyć, że graf nachodzeń G rodziny I jest spójny, bo inaczej wystarczy rozważyć jego spójną składową świadczącą o $\dim^*(I)$. Ustalmy element (korzeń) r o najwcześniejszym lewym końcu. Niech $D_k = \{x \in I : d_G(r, x) = k\}$ dla $k \geq 0$. Definiujemy $W_0 = \bigcup_{2 \nmid k} D_k$, $W_1 = \bigcup_{2 \mid k} D_k$. Niech $x \in I \setminus \{r\}$. Rozważmy najkrótszą ścieżkę z r do x (jedną z nich). Jeśli wierzchołek poprzedzający x nachodzi na niego od lewej, to mówimy, że x jest lewy. W przeciwnym wypadku jest prawy. Dla $\alpha \in \{0, 1\}$ definiujemy $W_{\alpha,L} = \{x \in W_\alpha : x \text{ jest lewy}\}$. Analogicznie $W_{\alpha,R}$. Niektóre elementy mogą występować w obu tych zbiorach. Usuwanie je z $W_{\alpha,R}$ tak, aby te zbiory tworzyły podział W_α . Do tego dodajemy r do $W_{0,L}$. Z propozycji o podziale I mamy, że $\dim^*(W_{\alpha,\beta}) \geq 6m - 10 - 4$ dla pewnych $\alpha \in \{0, 1\}$, $\beta \in \{L, R\}$.

Niech J będzie spójną składową $W_{\alpha,\beta}$ świadczącą o wymiarze. Wtedy mamy $d_G(r, x) = k$ dla każdego $x \in J$ i pewnego k . Wynika to z tego, że nachodzące na siebie przedziały mają odległość od r różną o co najwyżej 1, ale odległości w J są tej samej parzystości, więc jeśli są różne, to o więcej niż jeden. Załóżmy, że $\beta = R$ (dla L dowód analogiczny) i podzielmy J na elementy maksymalne (dla $\beta = L$ byłyby to minimalne) Y oraz pozostałe Z . Mamy $\dim^*(J) \leq 2 + \dim^*(Z)$, bo jest $\dim^*(Y) \leq 1$ – są to parami przecinające się przedziały (jak w bazie indukcji). Dostajemy $\dim^*(Z) \geq 6(m-1) - 10$. Zatem Z zawiera $(m-1)$ -gąszcz.

Mamy w Z elementy $\{x_1, \dots, x_{m-1}\} \cup \{y_{j,k} : 1 \leq j < k \leq m-1\}$ o odpowiednich porównywalnościach. Niech x_m będzie przedziałem z Y o najbardziej prawym lewym końcu. Jest on nad każdym x_i , bo jeśli któreś x_i się z nim przecina, to przecina się ze wszystkim w Y i jest maksymalne. Rozważmy element x_i . Niech elementem poprzedzającym go na ścieżce do r będzie $y_{i,m}$. Nie należy on do J , bo jest w innej odległości od r . Z propozycji o grafach nachodzeń wiemy, że wychodzi on poza sumę przedziałów z J (od prawej). Zatem $y_{i,m}$ jest nieporównywalny z $x_i, \dots, x_m$. Do tego nachodzi się z x_i , a więc jest porównywalny z $x_1, \dots, x_{i-1}$. W ten sposób skonstruowaliśmy m -gąszcz, co kończy dowód. $\square$

Wniosek. Dla każdego posetu przedziałowego Q istnieje d takie, że jeśli dla posetu przedziałowego P zachodzi $\dim(P) \geq d$, to $Q \subseteq_{\text{ind}} P$.

Dowód. Załóżmy, że Q ma n elementów. Jeśli $\dim(P) \geq 36n - 8$, to dla jego rozróżniającej reprezentacji I mamy $\dim^*(I) \geq \dim(P) - 2 \geq 6 \cdot 6n - 10$, a więc pewien $(6n)$ -gąszcz jest podposetem indukowanym P . Zatem $Q \subseteq_{\text{ind}} U_{2n} \subseteq_{\text{ind}} P$, co kończy dowód. $\square$

8. Problemy geometryczne

2025-04-28

Definicja 41. Klasę grafów nazywamy dziedziczną, jeśli każdy indukowany podgraf grafu z tej klasy również do niej należy.

Przykład. Będziemy rozważać różne dziedziczne klasy grafów i sprawdzać, czy są doskonałe albo chociaż χ -ograniczone. Najprostszym kontrprzykładem dla tego drugiego jest wskazanie klasy grafów bez trójkątów i z nieograniczonym χ . Wobec tego będziemy szukać χ -nieograniczonych klas grafów bez trójkątów, a nawet takich z dużą talią. Dobrym źródłem dziedzicznych klas grafów są obiekty geometryczne.

Rozważmy grafy przecięć odcinków. Jeśli odcinki mają końce na dwóch równoległych prostych, to są to grafy permutacji, a więc są doskonałe. Jeśli jeden z końców leży na pewnej ustalonej prostej (a drugi gdziekolwiek), to dostajemy klasę grafów χ -ograniczonych. Dowolne odcinki w $\mathbb{R}^2$ mają już grafy bez trójkątów i z nieograniczonym χ , a w $\mathbb{R}^d$ dla $d \geq 3$ mogą mieć nawet dużą talię.

Rozważmy grafy przecięć figur o krawędziach równoległych do osi (wielowymiarowych „pudełek”). Grafy przedziałowe $\mathbb{R}$ są doskonałe. Przecięcia prostokątów w $\mathbb{R}^2$ są χ -ograniczone (Asplund i Grünbaum zrobili $O(\omega^2)$, Walczak $O(\omega \log \omega)$). Dla większej ilości wymiarów (czyli już od prostopadłościanów) jesteśmy w stanie znaleźć grafy z dużą talią i nieograniczonym χ .

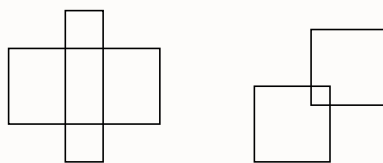
Rozważmy grafy rozłączności odcinków (dopełnienia grafów przecięć). Dopełnienie grafu permutacji jest grafem permutacji, więc jest to ta sama klasa grafów doskonałych. Natomiast dowolne odcinki w $\mathbb{R}^d$ dla $d \geq 2$ są χ -ograniczone. Zatem grafy rozłączności mają ładniejszą strukturę niż grafy przecięć.

Propozycja 32. Grafy porównywalności i nieporównywalności są doskonałe.

Dowód. W grafie porównywalności klika odpowiada łańcuchowi, a kolorowanie pokryciu antyłańcuchami. Twierdzenie dualne do twierdzenia Dilwortha mówi, że największa długość łańcucha ($\omega(G)$) jest równa najmniejszemu pokryciu antyłańcuchami ($\chi(G)$). W grafie nieporównywalności analogiczną własność daje twierdzenie Dilwortha. $\square$

Twierdzenie 14 (Asplund, Grünbaum 1960). Grafy przecięć prostokątów o bokach równoległych do osi układu współrzędnych są χ -ograniczone.

Dowód. Pokażemy, że $\chi(G) \leq \omega(G) \cdot (4\omega(G) - 3)$. Dla dowodu zauważmy, że krawędzie można podzielić na dwa typy: krzyżowe (w przecięciu nie zawiera się żaden narożnik) i narożnikowe (jest zawarty co najmniej jeden narożnik).



Niech G_1 i G_2 będą grafami na wierzchołkach G , które mają odpowiednio tylko krzyżowe i tylko narożnikowe krawędzie z G . Mamy $\chi(G) \leq \chi(G_1)\chi(G_2)$, bo kolorowanie produktowe jest poprawne na obu typach krawędzi.

Zorientujmy krawędzie G_1 tak, że krawędź jest w stronę prostokąta węższego na osi x . Takie zorientowanie jest przechodnie (prostokąt węższy na x musi na osi y rozciągać się poniżej i powyżej prostokąta szerszego, więc musi zawierać w sobie fragment przecięcia z tym jeszcze szerszym), a więc G_1 jest grafem porównywalności i jest doskonały. Mamy więc $\chi(G_1) = \omega(G_1) \leq \omega(G)$.

W G_2 każdy narożnik jest uwikłany w co najwyżej $\omega(G_2) - 1$ krawędzi, bo prostokąty zawierające go tną się parami niepusto, a więc tworzą klikę. Jeśli G zawiera n wierzchołków, to $E(G_2) \leq \frac{4n(\omega(G_2)-1)}{2} = 2n(\omega(G_2) - 1)$, bo każda krawędź jest związana z co najmniej dwoma wierzchołkami (w różnych prostokątach). Zatem $d(G_2) \leq 4(\omega(G_2) - 1)$. Każdy podgraf G_2 również jest grafem narożnikowych przecięć prostokątów, a więc zachodzi w nim ta sama nierówność. Średni stopień ogranicza stopień minimalny, więc mamy $\text{col}(G_2) \leq 4\omega(G_2) - 3 \leq 4\omega(G) - 3$. Ostatecznie $\chi(G) \leq \chi(G_1)\chi(G_2) \leq \omega(G) \cdot (4\omega(G) - 3)$. $\square$

Twierdzenie 15 (Larman, Matoušek, Pach, Törőcsik 1994). Jeśli G jest grafem rozłączności odcinków w $\mathbb{R}^2$, to zachodzi $\chi(G) \leq \omega(G)^4$.

Dowód. Rozważmy dwa rozłączne odcinki x, y takie, że lewy koniec x jest na lewo od lewego końca y . Mówimy, że krawędź xy jest krokiem w górę, jeśli projekcje x i y na poziomą oś są rozłączne lub lewy koniec y leży nad odcinkiem x . Podobnie xy jest krokiem w dół, jeśli odpowiednie projekcje są rozłączne lub odpowiedni koniec leży pod x . Do tego xy jest skróceniem w górę, jeśli rzut y na poziomą oś zawiera się w rzucie x i y leży nad x . Jeśli y leży pod x , to xy jest skróceniem w dół.

Te cztery możliwości dają nam podział krawędzi na 4 klasy. Do tego krawędzie w każdej klasie są skierowane (na podstawie lewych końców). Łatwo zauważyć, że nasze klasy są acykliczne (zawsze idziemy w prawo) oraz przechodnie. Zatem podgrafy indukowane przez te klasy krawędzi są grafami porównywalności, czyli są doskonałe. Stosując kolorowanie produktowe dostajemy $\chi(G) \leq \omega(G)^4$. $\square$

Definicja 42. Grafem geometrycznym nazywamy graf narysowany na płaszczyźnie za pomocą punktów i odcinków.

Propozycja 33. Graf geometryczny z n wierzchołkami i bez rozłącznych (na rysunku) krawędzi ma co najwyżej n krawędzi.

Dowód. Ustalmy taki graf G . Jeśli każdy wierzchołek ma stopień co najwyżej 2, to mamy $|E(G)| \leq n$. Dalej założmy, że v jest wierzchołkiem o stopniu co najmniej 3. Wtedy jedna z krawędzi incydentnych do v jest krawędzią separującą – prosta, w której ta krawędź jest zawarta, dzieli płaszczyznę na dwie części i w każdej jest krawędź incydentna do v . Wynika to z tego, że jeśli trzy krawędzie leżą w jednej półpłaszczyźnie, to można wziąć środkową, a jeśli nie, to każda z nich jest krawędzią separującą.

Powiedzmy, że separująca jest krawędź vw . Wierzchołek w ma stopień 1 – gdyby jakaś inna krawędź wychodziła z tego wierzchołka, to musiałaby przecinać obie krawędzie, które vw oddziela, co nie jest możliwe. Zatem możemy usunąć w i dostać tezę z indukcji. $\square$

Twierdzenie 16. Niech G będzie grafem geometrycznym o n wierzchołkach, w którym nie ma $k+1$ parami rozłącznych krawędzi. Wtedy $|E(G)| \leq k^4 n$.

Dowód. Popatrzmy na krawędzie naszego grafu jak na odcinki na płaszczyźnie. Tworzą one graf rozłączności, w którym największa klika ma rozmiar k . Zatem można podzielić krawędzie naszego grafu na k^4 klas, w których każda jest zbiorem niezależnym, czyli żadne dwie krawędzie w klasie nie są rozłączne. Na mocy poprzedniej propozycji w każdej takiej klasie jest co najwyżej n krawędzi, co daje tezę. $\square$

Definicja 43. Zbiorem przybijającym dla rodziny obiektów geometrycznych nazywamy taki zbiór punktów, że każdy obiekt z rozważanej rodziny zawiera któryś z tych punktów.

Definicja 44. Dla pewnego zbioru c rozłącznych linii $L_1, \dots, L_c$ c -przedziałem nazywamy obiekt $I = \bigcup_{j \in [c]} I_j$, gdzie I_j jest przedziałem w L_j .

Lemat 12. Niech $A_1, \dots, A_t$ będą rodzinami parami rozłącznych c -przedziałów. Do tego $|A_i| = t^c$. Dla każdego i możemy wybrać $X_i \in A_i$ tak, że c -przedziały $\{X_1, \dots, X_t\}$ są parami rozłączne.

Dowód. Przeprowadzimy dowód indukcyjny po (c, t) . Dla $t = 1$ teza jest oczywista. Dla $c = 1$ patrzmy na wszystkie rozważane rodziny na jednej linii. Wybieramy przedział o najbardziej prawym lewym końcu i usuwamy z rozważań całą rodzinę, do której on należał. Następnie usuwamy z rozważań wszystkie inne przedziały, które się z nim przecinają. Zauważmy, że z każdej rodziny usunęliśmy maksymalnie 1 element – gdybyśmy usunęli dwa przedziały z jednej rodziny, to ten bardziej prawy musiałby się zaczynać po początku wybranego przedziału, co jest sprzeczne z jego definicją. Nasze rodziny mają rozmiar t , więc będziemy w stanie wybrać w taki sposób t rozłącznych przedziałów, każdy z innej rodziny.

Dalej zakładamy $c, t \geq 2$. Dla każdego i patrzmy na elementy A_i na linii L_c . Widzimy na niej t^c roz-

łącznych przedziałów. Łączymy je w zbiory po t^{c-1} kolejnych przedziałów i rozważamy przedziały będące otoczkami wypukłymi tych zbiorów (to znaczy przedziałami o początku w najwcześniejszym początku i końcu w najpóźniejszym końcu). W ten sposób z rodziny A_i uzyskaliśmy rodzinę $\{y_{i,1}, \dots, y_{i,t}\}$ rozłącznych otoczek. Z bazy indukcji możemy wybrać po jednej otoczce z każdej rodziny tak, że są one rozłączne. Następnie ograniczamy każdą rodzinę do tych c -przedziałów, które zawierają się w wybranej dla niej otoczce. W tej chwili nasze rodziny mają po t^{c-1} elementów, a więc możemy ograniczyć się do linii $L_1, \dots, L_{c-1}$ i z założenia indukcyjnego wybrać po jednym $(c-1)$ -przedziale z każdej z rodzin tak, że są one rozłączne. Odpowiadające im oryginalne c -przedziały też są rozłączne, bo ograniczyliśmy nasze rodziny tak, że na ostatniej linii są one w pełni rozłączne. $\square$

Twierdzenie 17 (Gyárfás, Lehel 1969). Istnieje funkcja $\gamma(c)$ taka, że jeśli J jest rodziną c -przedziałów takich, że każde dwa się przecinają (na którejkolwiek współrzędnej), to istnieje zbiór przybijający H dla J składający się z końców przedziałów taki, że $|H| \leq \gamma(c)$.

Dowód. Rodzinę c -przedziałów nazywamy t -niezależną, jeśli nie ma w niej $t+1$ parami rozłącznych c -przedziałów. Pokażemy, że dla t -niezależnej rodziny c -przedziałów J istnieje funkcja $\beta(t, c)$ taka, że istnieje zbiór przybijający H dla J składający się z końców przedziałów taki, że $|H| \leq \beta(t, c)$. O tezie będzie wtedy świadczyć wartość $\beta(1, c)$. Przeprowadzimy indukcję po (c, t) . Na wstępie założymy, że rozważane przedziały mają różne końce (zawsze można je przesunąć nie zmieniając rozłączności).

Po pierwsze zauważmy, że $\beta(t, 1) = t$ – możemy zamiatać rozważaną linię od lewej i przybijać napotkanie końca jeszcze nieprzybitych przedziałów. Wtedy przybijemy wszystkie przedziały, a jeśli po ustaleniu t punktów istniałyby nieprzybite przedziały, to rodzina musiałaby zawierać $t+1$ niezależnych przedziałów.

W kroku indukcyjnym rozważmy linię L_{c+1} . Będziemy definiować punkty $p_0, p_1, \dots$ na L_{c+1} . Niech $p_0 = -\infty$ (dowolny punkt na lewo od wszystkich przedziałów). Mając p_r wybieramy p_{r+1} jako maksymalnie prawy punkt taki, że rodzina $\mathcal{B}_r = \{I \setminus L_{c+1} : I \in J, I_{c+1} \subseteq (p_r, p_{r+1})\}$ jest $((t+1)^c - 1)$ -niezależna. Z maksymalności p_{r+1} wynika, że p_{r+1} jest końcem pewnego przedziału, po dołączeniu którego rodzina $\mathcal{B}_r$ zawiera $(t+1)^c$ niezależnych c -przedziałów. Niech $\mathcal{E}_r$ będzie $\mathcal{B}_r$ po dołączeniu tego przedziału. Pokażemy, że $p_{t+1} = +\infty$, to znaczy zbiór wszystkich c -przedziałów po p_t jest $((t+1)^c - 1)$ -niezależny. Gdyby tak nie było, to rodziny $\mathcal{E}_0, \dots, \mathcal{E}_t$ byłyby poprawnie zdefiniowane. W każdej z nich mamy podrodzinę $(t+1)^c$ rozłącznych c -przedziałów, a więc istnieje wśród nich $t+1$ parami rozłącznych c -przedziałów. Z konstrukcji są one rozłączne też na L_{c+1} , a zatem mamy $t+1$ rozłącznych $(c+1)$ -przedziałów w J – sprzeczność.

Wybierając punkty $p_1, \dots, p_t$ pozostają nam do przybicia tylko te $(c+1)$ -przedziały, których odpowiadające c -przedziały należą do któregoś z $\mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_t$. Każda z tych rodzin jest $((t+1)^c - 1)$ -niezależną rodziną c -przedziałów, a więc z założenia indukcyjnego każdą z nich można przybić skończoną liczbą punktów. Ostatecznie dostajemy $\beta(t, c+1) \leq t + \beta((t+1)^c - 1, c) \cdot (t+1)$. $\square$

Lemat 13. Niech G będzie grafem rozłączności prostokątów o bokach równoległych do osi układu współrzędnych. Jeśli G nie ma $k+1$ parami rozłącznych prostokątów, to posiada zbiór przybijający rozmiaru co najwyżej k^2 . W szczególności zachodzi $\chi(G) \leq k^2$.

Dowód. Możemy rozważyć projekcje prostokątów na poziomą oś. Tworzą one poset przedziałowy o wysokości co najwyżej k (bo rozłączne przedziały powstają z rozłącznych prostokątów). Zatem mamy podział na k antylańcuchów. Wszystkie przedziały z jednego antylańcucha parami się przecinają, a więc mają punkt wspólny. Możemy narysować pionowe proste przechodzące przez te punkty, a następnie powtórzyć rozumowanie dla projekcji na drugą oś. W ten sposób dostajemy poziome proste. Każdy prostokąt zawiera w sobie punkt przecięcia prostej poziomej i pionowej przecinającej projekcje jego boków. Zatem wszystkie punkty przecięcia dają nam zbiór przybijający. Prostokąty przybite przez dany punkt można pokolorować na ten sam kolor, co daje ograniczenie na liczbę chromatyczną. $\square$

Twierdzenie 18. Niech P będzie zbiorem punktów a $\mathcal{R}$ rodziną prostokątów. Niech dla każdego $R \in \mathcal{R}$ zachodzi $P_R = P \cap R \neq \emptyset$. Mówimy, że $S, R \in \mathcal{R}$ są prawie rozłączne, jeśli $P_S \cap P_R = \emptyset$. Istnieje taka stała γ , że jeśli $\mathcal{R}$ nie zawiera $k+1$ parami prawie rozłącznych prostokątów, to istnieje zbiór przybijający $H \subseteq P$ o $|H| \leq k^7 \gamma$.

Dowód. Niech $R, S \in \mathcal{R}$ będą takie, że lewy dolny róg R leży pod lewym dolnym rogiem S (możemy założyć, że są różne). Rozważmy projekcje tych prostokątów na pionową oś. Rozważamy przypadki:

1. projekcja S leży wewnątrz projekcji R .
2. projekcja S nachodzi na projekcję R od góry lub jest z nią rozłączna.

Podobnie dla poziomych projekcji mamy przypadki:

1. projekcja S zawiera się w projekcji R .
2. projekcja R zawiera się w projekcji S .
3. projekcja S leży po prawej od projekcji R (nachodząc na nią lub nie)
4. projekcja S leży po lewej od projekcji R (nachodząc na nią lub nie)

Podzieliśmy w ten sposób pary prostokątów na 8 klas, w których można skierować pary od R do S , tworząc z klas relacje. Takie relacje są acykliczne oraz przechodnie. Po ograniczeniu się do prostokątów prawie rozłącznych dalej mamy relacje acykliczne i przechodnie (jeśli (R, S) i (S, T) są w relacji, to część wspólna R i T zawiera się w części wspólnej R i S), a do tego jedna z nich staje się pusta (połączenie 1 i 1 – R zawiera S). Z założenia każda relacja ma wysokość co najwyżej k , a więc całą rodzinę można podzielić na k^7 klas tak, że wewnątrz jednej klasy nie ma pary prawie rozłącznych prostokątów.

Rozważmy jedną taką klasę $\mathcal{C}$. Prostokąty w niej nie są prawie rozłączne, a więc nie są rozłączne. Dla rodziny przecinających się prostokątów istnieje punkt zawarty z każdym z tych prostokątów (wynika z analogicznej własności dla przedziałów). Możemy przesunąć prostokąty i założyć, że tym punktem jest środek układu współrzędnych. Niech Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 będą jego ćwiartkami. Rozważmy zbiory $A_i = \min(P \cap Q_i)$ (bierzemy porządek produktowy na modułach współrzędnych). Zauważmy, że jeśli jakiś prostokąt z $\mathcal{C}$ zawiera w sobie jakiś punkt z $P \cap Q_i$, to zawiera też punkt z A_i .

Możemy umieścić punkty z A_i na linii, wypisując je od najbliższego od pionowej osi do najdalszego (równoważne od najdalszego do poziomej osi do najbliższego). Prostokątowi $R \in \mathcal{C}$ przypiszemy przedział $I_{i,R}$ będący otoczką wypukłą zawartych w nim punktów z A_i . Jeśli prostokąt nie zawiera żadnych punktów z A_i , to kładziemy go za wszystkimi punktami tak, by był rozłączny z wszystkimi innymi przedziałami. Dla ustalonego R taka sytuacja nie może zajść dla wszystkich zbiorów A_i , bo R zawiera punkt z P w którejś ćwiartce.

Każdemu prostokątowi $R \in \mathcal{C}$ możemy więc przypisać 4-przedział $I_R = \bigcup_{i \in [4]} I_{i,R}$. Co więcej, dla $R, S \in \mathcal{C}$ mamy $I_R \cap I_S \neq \emptyset$ – wynika to z tego, że R i S mają wspólny punkt z P (w którejś ćwiartce), a więc mają wspólny punkt w którymś A_i . Zatem istnieje liczba $\gamma = \gamma(4)$ taka, że można przybić rozważane 4-przedziały za pomocą γ ich końców. Jeśli któryś z wybranych końców nie odpowiada punktowi z żadnego A_i , to jest końcem pewnego $I_{i,R}$ takiego, że $A_i \cap R = \emptyset$. Możemy wtedy zastąpić go końcem innego $I_{j,R}$, który należy do A_j . Zbiór punktów dalej będzie przybijający, bo wyrzucony punkt przybijał tylko 4-przedział prostokąta R . Przenosząc punkty z linii na płaszczyznę dostajemy zbiór co najwyżej γ punktów przybijających $\mathcal{C}$. Powtarzając to dla każdej klasy dostajemy tezę. $\square$

9. Wymiar bez standardowych przykładów

2025-04-28

Propozycja 34. Niech G będzie grafem bez trójkątów o n wierzchołkach. Zachodzi $\chi(G) = O(\sqrt{n})$.

Dowód. Jeśli G nie ma wierzchołków o co najmniej $\sqrt{n}$ sąsiadach, to możemy pokolorować graf zachłannie. Dalej założymy, że $v \in V(G)$ ma $\deg_G(v) \geq \sqrt{n}$. Między sąsiadami v nie ma krawędzi (graf nie ma trójkątów), a więc można pokolorować $N[v]$ za pomocą dwóch kolorów, a następnie usunąć te wierzchołki i powtarzać dla reszty grafu. Takich operacji usunięcia może być co najwyżej $\frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$, a w każdej korzystamy z dwóch nowych kolorów. To daje nam tezę. $\square$

Uwaga. Ścisłe szacowanie dla powyższego problemu wynosi $\Theta\left(\sqrt{\frac{n}{\log n}}\right)$.

Przykład. Będziemy chcieli wykazać podobny rezultat dla wymiaru posetu. Wiemy, że posety S_2 -wolne to posety przedziałowe, a więc maksymalny wymiar jest rzędu $\Theta(\log \log n)$. Dla posetów S_t -wolnych można pokazać ograniczenie górne $o(n)$ oraz dolne $\Omega(n^{1-g(n)})$. Dla $t = 3$ mamy do tego ograniczenie dolne $\Omega\left(\frac{\sqrt[6]{n}}{\log n}\right)$.

Propozycja 35. Niech $t \geq 3$ i niech P będzie posetem S_t -wolnym. Wtedy $Q = \text{sp}(P)$ również jest S_t -wolny.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że $S_t \subseteq_{\text{ind}} Q$. Elementy maksymalne tego S_t są elementami maksymalnymi splitu, a minimalne minimalnymi. Jeśli wszystkie elementy minimalne i maksymalne w S_t pochodzą od innych elementów z P , to te elementy tworzą S_t w P – sprzeczność. Zatem mamy element $a \in P$ taki, że a', a'' należą do S_t . Oba są sparowane z jakimś elementem, z którym są nieporównywalne. Ponieważ $t \geq 3$, to istnieje jeszcze trzecia nieporównywalna para – b' i c'' takie, że $b' < a''$ i $a' < c''$. Wtedy jednak $b < a$ i $a < c$ w P , co daje nam $b < c$ w P , a więc $b' < c''$ w Q – sprzeczność. $\square$

Lemat 14. Niech t, q będą liczbami naturalnymi takimi, że $2 \leq q$ i $t \leq q$. Niech $r \geq t2^t \ln q$ i niech $X = [x_{ij}]_{(i,j) \in [r] \times [q]}$ będzie binarną macierzą, w której wartości zostały wylosowane niezależnie i jednostajnie. Niech E będzie zdarzeniem mówiącym, że dla każdego ciągu t kolumn $1 \leq j_1 < \dots < j_t \leq q$ i wybranego w nim indeksu $1 \leq \ell \leq t$ istnieje taki wiersz i , że $x_{ij_\ell} = 1$ oraz $x_{ij_k} = 0$ dla $k \neq \ell$. Zachodzi $P(E) > 0$. W szczególności taka macierz istnieje.

Dowód. Ustalmy kolumny $s = (j_1, \dots, j_t)$ i indeks $\ell \in [t]$. Niech $E_{s,\ell}$ będzie zdarzeniem oznaczającym istnienie odpowiedniego wiersza dla s i ℓ . Mamy $P(\overline{E_{s,\ell}}) = (1 - 2^{-t})^r$ – wartości w każdym wierszu na ustalonych kolumnach muszą być inne niż te wymagane. Teraz przeliczamy.

$$\begin{aligned} P(E) &= 1 - P\left(\bigcup_{s,\ell} \overline{E_{s,\ell}}\right) \geq 1 - \sum_{s,\ell} P(\overline{E_{s,\ell}}) = 1 - \binom{q}{t} t (1 - 2^{-t})^r > 1 - q^t e^{-2^{-t}r} \\ &= 1 - e^{t \ln q - 2^{-t}r} \geq 1 - e^{t \ln q - 2^{-t}t2^t \ln q} = 0. \end{aligned}$$

Ostra nierówność wynika z szacowań $1 - x \leq e^{-x}$ oraz $\binom{q}{t} t < q^t$. $\square$

Definicja 45. Odwrotną liczbą Ramsey’a nazywamy liczbę $r(k, t, n)$, oznaczającą rozmiar największego monochromatycznego zbioru, jaki na pewno występuje w każdym k -kolorowaniu podzbiorów t -elementowych zbioru o n elementach.

Twierdzenie 19 (Biró, Hamburger, Pór 2013). Dla każdego ustalonego $t \geq 3$ maksymalny wymiar n -elementowego, S_t -wolnego posetu wynosi $o(n)$.

Dowód. Niech P będzie n -elementowym, S_t -wolnym posetem. Niech $Q = \text{sp}(P)$. Q jest S_t -wolny oraz $\dim(P) \leq \dim(Q)$. Oznaczmy zbiór elementów maksymalnych Q przez B , a minimalnych przez A . Do tego ustalmy porządek na elementach A . Rozważmy podzbiór $S = \{a_1, \dots, a_t\} \subseteq A$ o indeksach zgodnych z porządkiem na A . Element $b \in B$ nazywamy i -łącznikiem S , jeśli $a_i \parallel b$ oraz $a_j < b$ dla $j \neq i$. Q jest S_t -wolny, a więc dla pewnego i zbiór S nie ma i -łącznika. Ustalmy kolorowanie $\varphi: \binom{A}{t} \rightarrow [t]$ tak, że każdy $S \subseteq A$ o t elementach nie ma $\varphi(S)$ -łącznika.

Niech $C = \{c_1, \dots, c_c\} \subseteq A$ będzie taki, że dla pewnego $\ell \in [t]$ i każdego $S \subseteq C$ o t elementach jest $\varphi(S) = \ell$. Pokażemy, że wszystkie nieporównywalne pary w $C \times B$ można odwrócić za pomocą $c' = 2 \cdot \lceil t2^t \ln c \rceil$ liniowych rozszerzeń. Rozważmy macierz X o wymiarach $\frac{c'}{2} \times c$ i własności jak w powyższym lemacie. Niech $\bar{x} = (x_1, \dots, x_c)$ będzie jej wierszem. Definiujemy rozszerzenie liniowe L_ℓ : najpierw umieszczamy w nim elementy $(A \setminus C) \cup \{c_i \in C : x_i = 0\}$ w dowolnej kolejności, a następnie elementy $\{c_i \in C : x_i = 1\}$ w kolejności rosnących indeksów. Następnie umieszczamy elementy B tak nisko, jak się da. Podobnie definiujemy L_r , tym razem umieszczając elementy $\{c_i \in C : x_i = 1\}$ w kolejności malejących indeksów.

Pokażemy, że dla każdej nieporównywalnej pary $(c_i, b) \in C \times B$ istnieje $\bar{x}$ taki, że para jest odwracana w odpowiadającym mu L_ℓ lub L_r . Rozważmy zbiory $M_\ell = \{c_m \in C : c_m < b \text{ w } Q, m < i\}$ oraz

$M_r = \{c_m \in C : c_m < b \text{ w } Q, m > i\}$. Mamy $|M_l| < \ell - 1$ lub $|M_r| < t - \ell$, bo inaczej dla zbioru S składającego się z $\ell - 1$ elementów M_l , c_i i $t - \ell$ elementów M_r b jest ℓ -łącznikiem. W szczególności $|M_l| < t$ lub $|M_r| < t$.

Założmy $|M_r| < t$. Niech $M_r \cup \{c_i\} \subseteq S \subseteq C$ i $|S| = t$. Istnieje taki wiersz $\bar{x}$ macierzy X , że kolumna odpowiadająca c_i przyjmuje wartość 1, a kolumny odpowiadające pozostałym wartościom S przyjmują wartość 0. Popatrzmy na L_l tego wiersza. Wszystkie elementy M_r są na lewo od c_i (bo kolumny się zerują), a niezerujące się elementy M_l leżą na lewo od c_i , bo umieszczaliśmy je w kolejności zgodnej z indeksowaniem. Zatem każdy element $c \in C$ porównywalny z b leży pod c_i i mamy $b < c_i$ w L_l . Dla $|M_l| < t$ analogiczny argument wykorzystuje L_r .

Ustalmy monotoniczną funkcję $g(n)$ taką, że $g(n) = o(n)$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = \infty$. Oznaczmy $c(n) = r(t, t, g(n))$. Ta funkcja również jest monotoniczna i zmierza do nieskończoności. Rozważmy następujący proces: dopóki istnieje monochromatyczny podzbiór A rozmiaru $c(n)$ odwracamy pary między nim a B w przedstawiony wyżej sposób i usuwamy z rozważań elementy tego zbioru. Robimy to co najwyżej $\frac{n}{c(n)}$ razy. Ostatecznie nie będzie takiego zbioru, a więc w A zostanie nam mniej niż $g(n)$ elementów. Odwracamy pary między jednym elementem A a całym B jednym liniowym rozszerzeniem. Do tego wszystkie pary $A \times A$ i $B \times B$ można odwrócić dwoma rozszerzeniami. Ostatecznie mamy

$$\dim(Q) \leq \frac{n}{c(n)} (2 \cdot \lceil t^t \ln c(n) \rceil) + g(n) + 2.$$

Mamy $g(n) = o(n)$ oraz $\frac{\ln c(n)}{c(n)} \rightarrow 0$, a więc $\frac{n \ln c(n)}{c(n)} = o(n)$. Wartość t jest stała, a więc to kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 20 (Biró, Hamburger, Kierstead, Pór, Trotter, Wang 2020). Dla każdego ustalonego $t \geq 3$ i odpowiednio dużego n istnieje n -elementowy, S_t -wolny poset Q taki, że

$$\dim(Q) \geq \frac{n^{1 - \frac{2t-1}{t(t-1)}}}{12 \ln n}.$$

Dowód. Niech Q będzie losowym posetem powstałym w następujący sposób: ustalmy $p, q : p+q = 1$. Q będzie składał się z dwóch n -elementowych zbiorów A, B . Dla każdego $a \in A, b \in B$ ustalamy $a < b$ z prawdopodobieństwem p – czyli $a \parallel b$ z prawdopodobieństwem q . Do tego niech $p < \frac{1}{2}$.

Pokażemy, że prawdopodobieństwo istnienia skojarzenia doskonałego w (dwudzielnym) grafie nieporównywalności Q dąży do 1 (dla dużych n). Z twierdzenia Halla dopełnienie tego zdarzenia jest równoważne z istnieniem zbioru wierzchołków W takiego, że $|N(W)| < |W|$. Zatem mamy

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{W \subseteq A} |N(W)| < |W|\right) &\leq \sum_{W \subseteq A} P(|N(W)| < |W|) \leq \sum_{W \subseteq A} \sum_{\substack{Y \subseteq B \\ |Y| = n - |W| + 1}} P(\forall w \in W, y \in Y \ w < y) \\ &= \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i+1} p^{i(n-i+1)} \leq \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} n^{2i-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{i(\frac{n}{2}+1)} + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n n^{2(n-i)+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-i+1)(\frac{n}{2}+1)} \\ &= 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} e^{(2i-1) \ln n - i(\frac{n}{2}+1) \ln 2} = 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} e^{i(2 \ln n - \frac{\ln 2}{2} n) - i \ln 2 - \ln n} \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} e^{-i \frac{1}{4} n} \leq 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{4} n} = n e^{-\frac{1}{4} n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

W drugiej nierówności zauważamy, że małe sąsiedztwo oznacza duży zbiór porównywalny z W , w kolejnej szacujemy $\binom{n}{i} \leq n^i$ i $\binom{n}{n-i+1} \leq n^{i-1}$, potem wsadzamy wszystko w wykładnik i odwracamy indeksowanie drugiej sumy, potem korzystamy z $\ln n = o(n)$ i usuwamy logarytm dodając coś do ujemnej stałej przy n (i pozbywamy się ujemnych rzeczy), a potem możemy się pozbyć i .

Pokażemy, że prawdopodobieństwo istnienia zbiorów $A' \subseteq A$ i $B' \subseteq B$ o rozmiarach co najmniej

$k = \frac{3 \ln n}{p}$, między którymi nie ma porównywalności, dąży do 0. Oznaczmy to zdarzenie E .

$$P(E) \leq \sum_{\substack{W \subseteq A, Y \subseteq B \\ |W|=|Y|=k}} P(\forall_{w \in W, y \in Y} w \parallel y) = \binom{n}{k}^2 (1-p)^{k^2} \leq n^{2k} e^{-pk^2} = e^{2k \ln n - pk^2} = e^{-3 \frac{\ln^2 n}{p}} \rightarrow 0.$$

Niech X będzie zmienną losową zliczającą liczbę S_t w Q . Niech $X_{A', B'}$ będzie indykátorem istnienia S_t na odpowiednich zbiorach (o dobrych rozmiarach). Ustalmy konkretną wartość $p = n^{-\frac{2t-1}{t(t-1)}}$. Oczywiście $p < \frac{1}{2}$ dla odpowiednio dużych n .

$$E[X] = \sum_{\substack{A' \subseteq A, B' \subseteq B \\ |A'|=|B'|=t}} E[X_{A', B'}] = \binom{n}{t}^2 t! (1-p)^t p^{t(t-1)} \leq \frac{n^{2t}}{6} p^{t(t-1)} = \frac{1}{6} n^{2t} n^{-2t+1} = \frac{n}{6}.$$

Druga równość wynika z tego, że najpierw ustalamy zbiory, potem łączymy ich elementy w pary i ustalamy porównywalności. Potem usuwamy wyraz z $1-p$, $t!$ skraca się z mianownikiem $\binom{n}{t}$, a drugie $t!$ w mianowniku zastępujemy przez 6 (bo $t \geq 3$).

Z nierówności Markowa mamy $P(X > \frac{n}{4}) \leq \frac{2}{3}$. Z tego wszystkiego wiemy, że dla odpowiednio dużego n istnieje taki poset Q , że A i B mają skojarzenie doskonałe w grafie nieporównywalności Q , nie istnieją w pełni nieporównywalne zbiory A', B' o dużym rozmiarze i nie ma więcej niż $\frac{n}{4}$ kopii S_t . Dla każdej takiej kopii usuwamy z Q jeden jej element oraz odpowiadający jej w skojarzeniu element drugiego zbioru. Następnie ograniczamy się do $\frac{n}{2}$ elementów A i ich odpowiedników w skojarzeniu, dostając poset Q' o n elementach i bez S_t .

Rozważmy L będące liniowym rozszerzeniem Q' . Załóżmy, że L odwraca co najmniej $2 \cdot \frac{3 \ln n}{p}$ nieporównywalnych par tworzących skojarzenie. Wtedy możemy wziąć pierwsze $\frac{3 \ln n}{p}$ w L elementów z B i tyle samo ostatnich w L elementów z A . Wtedy wybrane elementy z B leżą w całości przez elementami z A , a więc są nieporównywalne w Q' . To daje nam dwa w pełni nieporównywalne zbiory o rozmiarze co najmniej $\frac{3 \ln n}{p}$, a wiemy, że takich nie ma. Zatem L odwraca nie więcej niż $2 \cdot \frac{3 \ln n}{p}$ takich par. Ostatecznie mamy

$$\dim(Q') \geq \frac{\frac{n}{2}}{2 \cdot \frac{3 \ln n}{p}} = \frac{np}{12 \ln n} = \frac{n^{1-\frac{2t-1}{t(t-1)}}}{12 \ln n}.$$

□

10. Wymiar i rzadkość

2025-05-12

Definicja 46. Graf H jest minorem grafu G (co oznaczamy $H \leq G$), jeśli istnieje rodzina rozłącznych zbiorów zwanych branch setami $\{\mathcal{B}_x : x \in V(H)\}$ taka, że $\emptyset \neq \mathcal{B}_x \subseteq V(G)$, $G[\mathcal{B}_x]$ jest spójny oraz jeśli $xy \in E(H)$, to istnieją $u \in \mathcal{B}_x, v \in \mathcal{B}_y$ takie, że $uv \in E(G)$.

Definicja 47. Graf H jest topologicznym minorem grafu G (co oznaczamy $H \leq_{\text{top}} G$), jeśli istnieje zbiór wierzchołków $\{v_x : x \in V(H)\} \subseteq V(G)$ taki, że $v_x \neq v_y$ dla różnych x, y oraz jeśli $xy \in E(H)$, to w G istnieje ścieżka $v_x \rightsquigarrow v_y$.

Definicja 48. Graf H jest d -płytkim minorem grafu G (co oznaczamy $H \leq_d G$), jeśli jest jego minorem i każdy jego branch set ma promień co najwyżej d (istnieje wierzchołek odległy od każdego innego o co najwyżej d).

Definicja 49. Największą zredukowaną średnią gęstością (grad – greatest reduced average density) grafu G nazywamy parametr

$$\nabla_d(G) = \max \left\{ \frac{|E(H)|}{|V(H)|} : H \leq_d G \right\}.$$

Definicja 50. Klasa grafów $\mathcal{C}$ ma ograniczoną ekspansję (bounded expansion), jeśli istnieje funkcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taka, że dla każdego $G \in \mathcal{C}$ i każdego $d \in \mathbb{N}$ mamy $\nabla_d(G) \leq f(d)$.

Uwaga. Bardzo dużo naturalnych klas grafów (zabroniony minor, ograniczony genus, k -planarność, ograniczony stopień) zawiera się w klasie grafów o ograniczonej ekspansji.

Definicja 51. Rozważmy graf G , porządek na jego wierzchołkach σ i $r \in \mathbb{N}$. Mówimy, że wierzchołek u jest r -słabo osiągalny z v (względem σ), jeśli istnieje ścieżka Q prowadząca $v \rightsquigarrow u$ długości co najwyżej r taka, że $\min_\sigma Q = u$. Zbiór wszystkich takich u oznaczamy $\text{WReach}_r[G, \sigma, v]$.

Definicja 52. r -słabą liczbą kolorującą grafu G nazywamy parametr

$$\text{wcol}_r(G) = \min_{\sigma} \max_{v \in V(G)} |\text{WReach}_r[G, \sigma, v]|,$$

gdzie minimum jest brane po wszystkich σ będących porządkami liniowymi na $V(G)$.

Uwaga. Zachodzi $\text{wcol}_1(G) = \text{col}(G)$.

Uwaga. Jeśli w definicji ograniczonej ekspansji podstawimy słabą liczbę kolorującą zamiast gradu, to dostaniemy identyczną klasę grafów. Takie dwie definicje są równoważne.

Uwaga. Dla grafów planarnych r -słaba liczba kolorująca jest ograniczona przez $O(r^3)$. Dla szerokości drzewiastej co najwyżej t wynosi $\binom{r+t}{t}$. Zabraniając K_t jako minor dostajemy $O(r^{t-1})$.

Twierdzenie 21 (Joret, Micek, Ossona de Mendez, Wiechert 2019). Niech P będzie posetem o wysokości co najwyżej h i z grafem pokryć G takim, że $\text{wcol}_{3h-3}(G) \leq c$. Wtedy $\dim(P) \leq 4^c$.

Dowód. Ustalamy $c = \text{wcol}_{3h-3}(G)$. Niech o tej wartości świadczy liniowy porządek π . Niech φ będzie zachłannym c -kolorowaniem elementów P zgodnie z porządkiem π . Wierzchołek x jest pokolorowany kolorem, którego nie ma na występujących wcześniej osiągalnych z niego wierzchołkach.

Ustalmy $x \in P$ i rozważmy $y, z \in \text{WReach}_{h-1}[G, \pi, x]$. Jeśli z jest przed y w π , to można z y dojść do x i potem do z , co daje nam $z \in \text{WReach}_{2h-2}[G, \pi, y]$. Jeśli y jest przed z , to analogicznie dostajemy $y \in \text{WReach}_{2h-2}[G, \pi, z]$.

Definiujemy $\text{WU}[x] = \{y \in U[x] : \exists \text{ścieżka } Q \text{ idąca relacjami pokrycia od } x \text{ do } y \text{ } \min_\pi(Q) = y\}$. Podobnie $\text{WD}[x] = \{y \in D[x] : \exists \text{ścieżka } Q \text{ idąca relacjami pokrycia od } y \text{ do } x \text{ } \min_\pi(Q) = y\}$.

Mamy $\text{WD}[x], \text{WU}[x] \subseteq \text{WReach}_{h-1}[G, \pi, x]$, bo każde Q świadczące o $y \in \text{WD}[x]$ jest łańcuchem. Weźmy $x \in P$ i $i \in \varphi(\text{WU}[x])$. Istnieje dokładnie jeden element w $\text{WU}[x]$ pokolorowany na i , bo inaczej jeden należy do $\text{WReach}_{2h-2}[G, \pi, \cdot]$ drugiego, a mimo to mają ten sam kolor. Tak samo dla $\text{WD}[x]$. Te jedyne elementy oznaczamy $\text{wu}_i(x)$ i $\text{wd}_i(x)$.

Rozważmy $(x, y) \in \text{Inc}(P)$. Sygnaturą tej pary nazywamy $\text{sgn}(x, y) = (A, B, C)$, gdzie $A = \varphi(\text{WU}[x])$, $B = A \cap \varphi(\text{WD}[y])$, $C = \{i \in B : \text{wu}_i(x) <_\pi \text{wd}_i(y)\}$. Mamy $C \subseteq B \subseteq A \subseteq [c]$, zatem możliwych trójek (A, B, C) jest 4^c , bo każdy element $[c]$ można wsadzić do C , $B \setminus C$, $A \setminus B$ lub $[c] \setminus A$. Do tego mamy $\text{wu}_i(x) \neq \text{wd}_i(y)$, bo inaczej x i y byłyby porównywalne.

Ustalmy (A, B, C) . Chcemy pokazać, że $\{(x, y) \in \text{Inc}(P) : \text{sgn}(x, y) = (A, B, C)\}$ jest odwracalny, co da nam tezę. Nie wprost bierzemy cykl alternujący $((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k))$ taki, że $\text{sgn}(x_i, y_i) = (A, B, C)$. Dla każdej porównywalności $x_j \leq y_{j+1}$ ustalamy ścieżkę (łańcuch) Q_j idącą relacją pokrycia. Niech będzie to ta spośród takich ścieżek, której najwcześniejszy w π element q_j jest najwcześniejszy możliwy. Niech q będzie najwcześniejszym ze wszystkich q_j . Bez straty ogólności jest to q_1 .

Niech t będzie kolorem q_1 . Mamy $x_1 \leq q_1 \leq y_2$ w P . Wiemy, że $q_1 \in \text{WU}[x_1]$ i $q_1 \in \text{WD}[y_2]$. To oznacza, że $t \in \varphi(\text{WU}[x_1]) = A = \varphi(\text{WU}[x_2])$. Wraz z $t \in \varphi(\text{WD}[y_2])$ daje to $t \in B$. Z tego wynika, że elementy $\text{wu}_t(x_i)$ i $\text{wd}_t(y_i)$ są poprawnie zdefiniowane dla każdego i .

Założmy, że $t \in C$. Znaczy to, że $wu_t(x_2) <_\pi wd_t(y_2) = q_1 \leq_\pi q_2$ (definicja C i t). Wiemy, że $wu_t(x_2)$ jest $(h-1)$ -słabo osiągalne z x_2 , $wd_t(y_3)$ jest $(h-1)$ -słabo osiągalne z y_3 , a Q_2 łączy x_2 z y_3 za pomocą co najwyżej $h-1$ krawędzi i leży w całości na prawo od $wu_t(x_2)$. Zatem jeden z $wu_t(x_2)$, $wd_t(y_3)$ jest $(3h-3)$ -słabo osiągalny z drugiego. Oba mają ten sam kolor, a więc muszą być sobie równe. Oznaczmy ich wspólną wartość przez q^* . Mamy $x_2 \leq q^* \leq y_3$ oraz $q^* <_\pi q_1 \leq_\pi q_2$, co przeczy definicji Q_2 jako ścieżki mającej najwcześniejsze możliwe q_2 .

Teraz założmy, że $t \notin C$. Zatem $wd_t(y_1) <_\pi wu_t(x_1) = q_1 \leq_\pi q_k$. Wiemy, że $wd_t(y_1)$ jest $(h-1)$ -słabo osiągalne z y_1 , $wu_t(x_k)$ jest $(h-1)$ -słabo osiągalne z x_k , a Q_k łączy x_k z y_1 za pomocą co najwyżej $h-1$ krawędzi i leży w całości na prawo od $wd_t(y_1)$. Zatem jeden z $wd_t(y_1)$, $wu_t(x_k)$ jest $(3h-3)$ -słabo osiągalny z drugiego. Osiągamy sprzeczność tak samo, jak przedtem. $\square$

Wniosek (Streib, Trotter 2014). Istnieje funkcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taka, że dla każdego h i posetu P o wysokości co najwyżej h i planarnym grafie pokryć mamy $\dim(P) \leq f(h)$.

Dowód. Dla grafów planarnych zachodzi $wcol_r(G) = O(r^3)$, więc mamy $\dim(P) \leq 4^{O(h^3)}$. $\square$

11. Algorytmy on-line

2025-05-19

Definicja 53. Kolorowanie grafu on-line to gra dwuosobowa. Mamy prezentera i algorytm, prezenter w danej rundzie ujawnia wierzchołek, a algorytm ustala jego kolor. Prezenter ujawnia całe sąsiedztwo wierzchołka w już ujawnionych wierzchołkach, a algorytm na podstawie tej informacji podejmuje decyzję.

Propozycja 36. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ prezenter ma strategię na wymuszenie n kolorów podając las.

Dowód. Niech $S(n)$ będzie strategią prezentera na n kolorów. $S(1)$ to po prostu jeden wierzchołek. W $S(n)$ tworzymy po jednej kopii $S(1), S(2), \dots, S(n-1)$. W każdym $S(i)$ istnieje kolor α_i , którego nie ma w $S(i-1)$. Niech wierzchołek o tym świadczący to v_i . Dodajemy nowy wierzchołek połączony z $v_1, \dots, v_{n-1}$, on musi mieć nowy kolor. $\square$

Uwaga. Lasy mają liczbę chromatyczną 2. Zatem wynik algorytmu on-line może być dowolnie gorszy niż algorytmu off-line.

Definicja 54. Wartością gry dla klasy grafów $\mathcal{C}$ nazywamy najmniejszą ilość kolorów, jaką algorytm da radę poprawnie pokolorować dowolny n -wierzchołkowy graf z $\mathcal{C}$. Równoważnie jest to największa liczba kolorów, jaką prezenter jest w stanie wymusić. Analogicznie definiujemy wartość gry dla innych rodzajów gier (dla których to ma sens).

Przykład. Dla n -wierzchołkowego grafu będącego lasem algorytm First-Fit ogranicza wartość gry z góry przez $\log n + 1$. Dla grafów dwudzielnych First-Fit już nie działa (standardowy przykład czytany jako graf), ale istnieje algorytm, który daje około $2 \log n$.

Dla grafów bez trójkątów mamy ograniczenie dolne $\sqrt{n}$ i górne $O\left(n^{\frac{\log \log n}{\log n}}\right)$.

Propozycja 37. Rozważmy klasę grafów, które mają reprezentację jako grafy przecięć krzywych o początku i końcu na dwóch ustalonych prostych. Ta klasa to dokładnie grafy nieporównywalności.

Dowód. Można rozważyć poset na krzywych, w którym krzywe są porównywalne, jeśli się nie przecinają, a wyżej w posecie jest ta krzywa, która jest wyżej na rysunku. Widzimy, że rozważany graf jest grafem nieporównywalności tego posetu. W drugą stronę weźmy realizator posetu, któremu odpowiada graf i przypiszmy każdemu liniowemu rozszerzeniu pionową prostą. Zaznaczmy na niej punkty zgodnie z tym liniowym rozszerzeniem (na każdej prostej kolejne punkty są na tej samej wysokości). Krzywa powstanie poprzez połączenie punktów odpowiadających danemu elementowi. $\square$

Przykład. Dla kolorowanie on-line grafów nieporównywalności istnieje strategia taka, że algorytm używa $f(\chi(G))$ kolorów dla pewnego f . Kolorowanie grafu nieporównywalności sprowadza się do

znajdowania podziału posetu na łańcuchy. Jest jednak trudniejsze, bo nie mamy zadanej orientacji krawędzi.

Twierdzenie 22 (Schmerl, Szemerédi). Wartość gry dzielenia on-line posetu wysokości co najwyżej h na antyłańcuchy wynosi co najwyżej $\binom{h+1}{2}$.

Dowód. Algorytm będzie utrzymywał rodzinę $\{A_{a,b} : a, b \in \mathbb{N}_1, a + b \leq h + 1\}$ składającą się z antyłańcuchów. Gdy prezydent prezentuje element x algorytm znajduje długość najdłuższego łańcucha (w już przedstawionym posecie) kończącego się na x . Niech będzie to a . Niech b będzie długością najdłuższego łańcucha zaczynającego się od x . Dodajemy x do $A_{a,b}$ (które jest poprawnie zdefiniowane). Gdyby było $y < x$ dla pewnego $y \in A_{a,b}$, to istnieje łańcuch długości a kończący się na y . Można do niego dołożyć x , tworząc łańcuch długości $a + 1$. Sprzeczność z definicją a . Analogicznie jeśli $y > x$. Zatem zbiór $A_{a,b}$ dalej jest antyłańcuchem. $\square$

Twierdzenie 23 (Szemerédi). Wartość gry dzielenia on-line posetu szerokości co najwyżej w na łańcuchy wynosi co najmniej $\binom{w+1}{2}$. Co więcej to ograniczenie dalej działa, jeśli ograniczymy się do dwuwymiarowych posetów, a prezydent będzie prezentował elementy wraz z ich zanurzeniem w $\mathbb{R}^2$.

Dowód. Oznaczmy przez $S(w)$ strategię dla prezentera wymuszającą $\binom{w+1}{2}$ łańcuchów. Dla $w = 1$ wystarczy zaprezentować jeden element. Dalej zakładamy $w \geq 2$. Elementy podziału na łańcuchy wyznaczone przez algorytm będziemy nazywać kolorami. Zaczniemy od stworzenia łańcucha długości w , w którym każdy element jest w innym kolorze.

Skonstruujemy zbiory R, L takie, że R będzie szukanym łańcuchem, a L pozostałymi zaprezentowanymi elementami. Zaczynamy z jednym elementem, który wsadzamy do R . Umieszczamy nad nim nieporównywalne elementy (w zanurzeniu umieszczamy je w taki sposób, że kolejne elementy są coraz bardziej na prawo i coraz niżej, ale nigdy pod pierwszym elementem). W pewnym momencie algorytm będzie musiał użyć nowego koloru. Element o nowym kolorze idzie do R , a pozostałe do L . Następnie powtarzamy całą operację na nowym elemencie R w taki sposób, że dodawane właśnie elementy są nieporównywalne z L (umieszczamy kolejne elementy coraz bardziej na prawo, ale pod wszystkimi elementami z L). W końcu w R będzie w elementów o różnych kolorach.

Prezentujemy teraz poset $S(w - 1)$ w taki sposób, że jego wszystkie elementy leżą pod L i są nieporównywalne w R (dajemy je bardzo na lewo na wysokości pomiędzy najwyższym elementem R a najniższym L). Uzyskany poset ma szerokość co najwyżej w , bo elementów w L będzie co najwyżej $w - 1$, a do antyłańcucha z $S(w - 1)$ można dodać jeden element z R i nie można dodać żadnego z L . Do tego kolory użyte na $S(w - 1)$ są różne niż na R , bo te zbiory są nieporównywalne. Zatem wymuszamy użycie $\binom{w}{2} + w = \binom{w+1}{2}$ kolorów. $\square$

Uwaga. Gdyby w powyższej konstrukcji odwrócić kierunek poziomej osi w $\mathbb{R}^2$ (to znaczy patrzeć na porównywalności $(x, y) < (u, v) \iff x > u \wedge y < v$), to każda nieporównywalność zamieni się w porównywalność. Gdyby algorytm szukał podziału na antyłańcuchy, to taka konstrukcja wymusiłaby użycie $\binom{h+1}{2}$ kolorów na posecie o wysokości co najwyżej h . Zatem $\binom{h+1}{2}$ jest wartością gry dzielenia on-line posetu na antyłańcuchy.

Definicja 55. Wariant up-growing dzielenia on-line posetu na łańcuchy/antyłańcuchy polega na tym, że w momencie podawania elementu musi on być maksymalny.

Twierdzenie 24 (Felsner 1997). Wartość gry up-growing dzielenia on-line posetu szerokości co najwyżej w na łańcuchy wynosi $\binom{w+1}{2}$.

Dowód. Zaczniemy od wskazanie strategii dla prezentera. Element podziału na łańcuchy będziemy nazywać kolorem. Dla koloru α przez $\max(\alpha)$ oznaczamy element maksymalny tego łańcucha. Jeśli x jest elementem maksymalnym posetu, to przez $B(x)$ oznaczamy zbiór takich kolorów α , że $\max(\alpha) \leq x$ i $\max(\alpha) \not\leq y$ dla $y \neq x$. Dla szerokości w wskażemy strategię $S(w)$, w wyniku której zaprezentowany poset będzie miał w elementów maksymalnych $x_1, \dots, x_w$ takich, że $|B(x_i)| = i$. To da nam tezę.

Dla $w = 1$ wystarczy zaprezentować jeden element. Dalej założymy $w \geq 2$. Strategia $S(w)$ będzie

się składać z kilkukrotnego powtórzenia $S(w-1)$. Zaczynamy od jednego zastosowania $S(w-1)$, po którym mamy elementy maksymalne $x_1, \dots, x_{w-1}$ o własności jak w założeniu indukcyjnym. Następnie ponownie stosujemy $S(w-1)$, tym razem umieszczając wszystkie nowododane elementy nad każdym z $x_1, \dots, x_{w-2}$. W ten sposób dostaniemy większy poset o elementach maksymalnych $y_1, \dots, y_{w-1}, x_{w-1}$ takich, że $|B(y_i)| = i$ oraz $|B(x_{w-1})| = w-1$.

Umieścimy nowy element q nad wszystkimi elementami aktualnego posetu. Będzie on miał kolor α taki, że $\alpha \notin B(x_{w-1})$ lub $\alpha \notin B(y_{w-1})$ (rozważamy te zbiory w momencie przed dodaniem q , gdy x_{w-1} i y_{w-1} dalej są maksymalne). Zakładamy bez straty ogólności, że zachodzi pierwszy z tych warunków (zawsze można zamienić x_{w-1} i y_{w-1} miejscami). Wtedy $B(q) = B(x_{w-1}) \cup \{\alpha\}$, czyli ma w elementów.

Na koniec stosujemy $S(w-1)$ umieszczając wszystkie nowododane elementy nad każdym z elementów $y_1, \dots, y_{w-1}$. W ten sposób otrzymujemy poset o elementach maksymalnych $z_1, \dots, z_w$ takich, że $z_w = q$ i spełniają one żadaną własność.

W strategii dla algorytmu skonstruujemy rodzinę $F_1, \dots, F_w$ taką, że każdy F_i jest rodziną co najwyżej i łańcuchów. Będziemy utrzymywać niezmiennik, że dla każdego i zbiór $\text{Tops}(F_i)$ (elementy maksymalne łańcuchów) jest antyłańcuchem.

Prezenter podaje x . Niech $j = \min \{i \in [w] : |F_i| < i \vee \exists y \in \text{Tops}(F_i) y < x \text{ w } P\}$. Gdyby takie j nie istniało, to byłoby $|F_w| = w$ i $\text{Tops}(F_w)$ z x tworzyłoby antyłańcuch długości $w+1$ – sprzeczność.

Jeśli $|F_j| < j$ i nie zachodzi drugi warunek, to dodajemy $\{x\}$ do tej rodziny. Jeśli zachodzi drugi warunek i istnieje dokładnie jeden $C \in F_j$ taki, że $C < x$, to można rozszerzyć C o x . W przeciwnym wypadku w F_j są co najmniej dwa łańcuchy porównywalne z x . Zatem $j \geq 2$ i F_{j-1} istnieje oraz $x \parallel \text{Tops}(F_{j-1})$. Można więc wziąć $C \in F_j$ taki, że $C < x$ i zastąpić F_j przez F_{j-1} z dorzuconym $C \cup \{x\}$, a F_{j-1} zastąpić przez $F_j \setminus \{C\}$. $\square$

Przykład. Dowolny poset szerokości w ma wartość gry dzielenia on-line na łańcuchy między $\binom{w+1}{2}$ a $w^{O(\log \log w)}$. W wariancie up-growing wartość dokładna to $\binom{w+1}{2}$.

Dla posetów przedziałowych wartość dokładna (z prezentowaniem reprezentacji lub bez) to $3w-2$. Wariant up-growing ma wartość $2w-1$, a po dorzuceniu do niego reprezentacji mamy w . Posety równopredziałowe mają wartość $2w-1$, up-growing ma $\frac{1+\sqrt{5}}{2}w$, a dla zadanej reprezentacji (bez up-growing) jest między $1.5w$ a $2w-1$. Prawa strona wynika z tego, że można zachłannie umieszczać elementy w łańcuchach. Na przedział z jednej strony nachodzi co najwyżej $w-1$ przedziałów, a więc jest nieporównywalny z co najwyżej $2w-2$ elementami. Lewa strona ma swoją konstrukcję – najpierw umieszczamy k identycznych przedziałów (które dostaną różne kolory), następnie na prawo od nich umieszczamy $2k$ przedziałów. Jeśli algorytm użyje koloru już użytego, to następny przedział nachodzi na poprzedni od lewej, inaczej od prawej. W ten sposób dostaniemy co najmniej k nowych kolorów, których przedziały nachodzą przedziały o poprzednich kolorach z lewej. Można umieścić k nowych przedziałów tak, żeby nachodziły na początkowe k przedziałów i te k o nowych kolorach. Będą musiały mieć inne kolory. To daje nam $3k$ kolorów i szerokość $2k$.

Twierdzenie 25 (Kierstead, Trotter 1981; Chrobak, Ślusarek 1988). Wartość gry dzielenia on-line posetu przedziałowego szerokości co najwyżej w (z lub bez reprezentacji) na łańcuchy wynosi $3w-2$.

Dowód. Pokażemy strategię dla prezentera z podawaniem reprezentacji. Niech $S(w)$ będzie strategią dla szerokości w . Dla $w=1$ dajemy jeden przedział. Zakładamy $w \geq 2$ i definiujemy $S(w)$. Będziemy prezentować dużo rozłącznych kopii $S(w-1)$. Wewnątrz jednej algorytm musi użyć $3w-5$ kolorów. Jeśli algorytm w końcu użyje $3w-2$ kolorów, to mamy to, co chcieliśmy. W przeciwnym wypadku z zasady szufladkowej po odpowiednio wielu kopiach $S(w-1)$ będą istniały 4 takie, że występuje w nich ten sam zbiór $3w-5$ kolorów. Wypiszmy te cztery kopie w kolejności jak na osi: a, b, c, d . Tworzymy nowy przedział e przecinający się z a (ze wszystkim z a). Ma on nowy (względem tych ustalonych $3w-5$ kolorów) kolor 1. Tak samo tworzymy f dla d . Jeśli f ma nowy kolor 2, to tworzymy g łączący e i f , on musi mieć nowy kolor 3. Jeśli f ma kolor 1, to tworzymy g' przecinający e i b , on musi mieć nowy kolor 2, stworzenie h przecinającego g' i f daje nam kolor 3.

Pokażemy strategię dla algorytmu bez podawania reprezentacji. Niech $A(w)$ będzie strategią dla

szerokości w . Dla $w = 1$ używamy jednego koloru. Zakładamy $w \geq 2$ i definiujemy $A(w)$. Algorytm będzie utrzymywał podział posetu na zbiory G, R takie, że $\text{width}(G) \leq w - 1$. Prezentor przedstawia element x . Jeśli $\text{width}(G \cup \{x\}) \leq w - 1$, to można zadziałać indukcyjnie $A(w - 1)$ na G , do którego dokładamy x . W przeciwnym wypadku umieszczamy x w R i kolorujemy zachłannie korzystając z kolorów $\{1, 2, 3\}$, które nie występują w G .

Każde $r \in R$ posiada punkt wspólny z pewnymi $w - 1$ elementami G (świadczący o tym, że r nie można było wrzucić do G). Zatem przedział z R nie może być w całości pokryty sumą innych elementów z R , bo ten punkt byłby wtedy wspólny z innym elementem R , co dałoby antyłańcuch długości $w + 1$. Zatem przedział z R może się przecinać z co najwyżej dwoma innymi – gdyby przecinał się z trzema, to łatwo sprawdzić, że jedno z tych czterech przedziałów musiałoby zawierać się w sumie innych. Czyli R da się pokolorować zachłannie 3 kolorami.

Przedstawiony algorytm wygląda, jakby wymagał znajomości w . Nie jest ona jednak potrzebna. Można zacząć zakładając $w = 1$ i w momencie, gdy kolorowanie zachłanne zawiedzie, połączyć G z R i zwiększyć zakładaną wartość w o jeden. $\square$

12. Kolorowanie First-Fit

2025-05-26

Definicja 56. Dla grafu G kolorowanie $c : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ jest kolorowaniem First-Fit, jeśli jest poprawnym kolorowaniem i dla każdego $\alpha \in \mathbb{N}$ i $v \in V(G)$ jeśli $c(v) = \alpha$, to dla każdego $\beta < \alpha$ istnieje $w \in N(v)$ taki, że $c(w) = \beta$.

Uwaga. Strategia kolorowania First-Fit zwraca uwagę tylko na występowanie relacji między elementami, a nie na ich naturę. Zatem działa ono tak samo np. dla kolorowania grafu przedziałowego i podziału posetu przedziałowego na łańcuchy (z reprezentacją lub bez).

Propozycja 38. First-Fit używa co najwyżej ω^2 kolorów na grafie przedziałowym o liczbie klikowej co najwyżej ω .

Dowód. Niech $f(\omega)$ będzie funkcją ograniczającą liczbę użytych kolorów zależnie od ω . Mamy $f(1) = 1$. Dalej założymy $\omega \geq 2$. Każdy przedział posiada co najwyżej $\omega - 1$ sąsiadów, którzy przecinają się z jego lewym końcem. Podobnie z prawym. Natomiast sąsiedzi zawarci w przedziale tworzą graf o liczbie klikowej co najwyżej $\omega - 1$. Z tego wynika, że rozważany przedział może dostać kolor co najwyżej $1 + 2\omega - 2 + f(\omega - 1)$, a więc taki jest największy kolor, jaki może się pojawić w rozważanym kolorowaniu. Indukcyjnie dostajemy $f(\omega) \leq \omega^2$. $\square$

Definicja 57. Ścianą First-Fitową (First-Fit wall) nazywamy rysunek obrazujący kolorowanie First-Fit grafu przedziałowego. Na pionowej osi mamy poziomy odpowiadające kolorom. Przedział utożsamiamy z „cegłą” w ścianie, która na poziomej osi odpowiada temu przedziałowi, a na pionowej zajmuje cały jeden poziom odpowiadający jej kolorowi. Każda cegła musi mieć na każdym niższym poziomie co najmniej jedną cegłę, z którą się nachodzi na poziomej osi.

Twierdzenie 26 (Downey, McCartin 2004). First-Fit używa co najwyżej 8ω kolorów na grafie przedziałowym o liczbie klikowej co najwyżej ω .

Dowód. Mamy ustaloną rodzinę przedziałów $\mathcal{I}$. Rozważmy kolorowanie First-Fit c i jego ścianę First-Fitową. Rysujemy na niej od lewej pionowe linie $L_1, \dots, L_r$ tak, że każdy przedział przecina się z jakąś linią i jest to minimalna taka rodzina. Zastosujemy technikę zwaną column construction method. Będziemy tworzyć kolumny na liniach $L_1, \dots, L_r$ i w kolejnych ich poziomach wstawiać różne znaki.

Będziemy tworzyć ciąg zbiorów indeksów $\{1, \dots, r\} = C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$, gdzie elementy C_i oznaczają indeksy kolumn „żywych” na poziomie i (takich, które sięgają do tego poziomu). Dla $s \in C_i$ będziemy definiować znak $\text{label}_s(i) \in \{R, F, T\}$. Przez $R_s(i, j)$ oznaczamy ilość R w kolumnie s między

poziomami i a j . Analogicznie definiujemy $T_s(i, j)$ i $F_s(i, j)$. Dla każdego $s \in C_1$ ustalamy

$$\text{label}_s(1) = \begin{cases} R, & L_s \text{ przecina się z przedziałem na poziomie } 1 \\ T, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}.$$

Dla $i \geq 2$ zaczynamy z $C_i = \emptyset$ i dodajemy indeksy na podstawie poprzedniego poziomu:

1. Dla każdego $s \in C_{i-1}$ jeśli L_s przecina się z przedziałem na poziomie i , to dodajemy s do C_i i ustalamy $\text{label}_s(i) = R$.
2. Dla każdego $s \in C_{i-1} \setminus C_i$ jeśli v będący sąsiadem kolumny s na poziomie $i-1$ żyje na poziomie i i ma $\text{label}_v(i) = R$, to dodajemy s do C_i i ustalamy $\text{label}_s(i) = T$.
3. Dla każdego $s \in C_{i-1} \setminus C_i$ rozważamy każdego ℓ będącego sąsiadem s na poziomie $i-1$. Jest on sąsiadem od pewnego poziomu h . Jeśli $R_s(h, i-1) > \frac{i-h}{4}$, to dodajemy s do C_i i ustalamy $\text{label}_s(i) = F$.

Niech m będzie najwyższym poziomem na ścianie First-Fitowej. Indukcją po (j, i) pokażemy, że dla każdego $j \in [m]$ oraz $i \leq j$ jeśli rozważymy przedział $v \in \mathcal{I}$ na poziomie j , to istnieje kolumna L_s przebijająca v taką, że $s \in C_i$. W szczególności dla $i = j$ znaczy to, że każdy przedział jest przebijany przez pewną żywą kolumnę. Dla $i = 1$ każda kolumna żyje a każdy przedział jest przebijany przez jakąś kolumnę. Dalej zakładamy $j, i \geq 2$. Z założenia indukcyjnego istnieje żywa na poziomie $i-1$ kolumna przebijająca v . Jeśli $i = j$, to z reguły 1. ta kolumna zostanie rozszerzona o kolejny poziom (i dostanie znak R). Jeśli $i < j$, to wiemy, że istnieje przecinający się z v przedział na poziomie i oraz, że przecina go pewna żywa kolumna (o znaku R). Jeśli ta kolumna przebiega v , to mamy tezę. W przeciwnym przypadku założymy, że jest na lewo od v i jest to najbardziej prawa taka kolumna. Jeśli kolumna żywa na poziomie $i-1$ będzie najbardziej lewą kolumną spełniającą odpowiednie warunki, to rozważane kolumny będą sąsiadować, a więc ta kolumna zostanie przedłużona ze znakiem T .

Niech m' oznacza ostatni indeks taki, że $C_{m'} \neq \emptyset$ – jakaś kolumna żyje. m' jest poprawnie zdefiniowane, bo po wystąpieniu ostatniego przedziału kolumny będą dostawały same T i F , a więc w końcu umrą. Pokazaliśmy, że $m' \geq m$. Niech L_s będzie kolumną o wysokości m' . Będziemy rozważać wszystkich lewych sąsiadów, jakich miała na odpowiednich poziomach. Mamy ciąg ich indeksów $\ell_k < \ell_{k-1} < \dots < \ell_1 < s$. Niech h_i będzie liczbą taką, że s i ℓ_i sąsiadują na poziomach od $h_{i-1} + 1$ do h_i . W ten sposób zdefiniowaliśmy ciąg $h_k > h_{k-1} > \dots > h_1 > h_0 = 0$ (najbliższy sąsiad był sąsiadem od początku, potem przestał rosnąć i dalszy sąsiad przejął jego rolę).

Zauważmy, że każde pojawienie się T w kolumnie L_s na poziomach pomiędzy $h_{i-1} + 1$ a h_i wynika z pojawienia się R w ℓ_i (lub w odpowiednim prawym sąsiedzie, co jest symetryczne). Jednocześnie mamy $R_{\ell_i}(h_{i-1} + 1, h_i) \leq \frac{h_i - h_{i-1}}{4}$, bo inaczej kolumna ℓ_i przeżyłaby po poziomie h_i . Zatem

$$T_s(1, m') \leq 2 \sum_{i=1}^k R_{\ell_i}(h_{i-1} + 1, h_i) \leq 2 \sum_{i=1}^k \frac{h_i - h_{i-1}}{4} = 2 \frac{h_k}{4} \leq \frac{m'}{2}.$$

Teraz pokażemy indukcyjnie, że dla każdego $i \in [m']$ i $t \in [r]$ takiego, że $t \in C_i$ mamy $R_t(1, i) \geq \frac{1}{4}R_t(1, i) + \frac{1}{4}F_t(1, i)$. Dla $i = 1$ teza jest oczywista, bo występują tam tylko znaki R i T . Dalej założymy $i \geq 2$ oraz, że $\text{label}_t(i) = F$ (bo inaczej szacowanie dla niższego poziomu daje nam tezę). Niech sąsiad świadczący o tym, że t dostało F sąsiaduje z nim od poziomu j . Mamy $R_t(j, i-1) \geq \frac{i-j+1}{4}$ (zamiast ostrej nierówności dodajemy 1). Teraz

$$\begin{aligned} R_t(1, i) &= R_t(1, j-1) + R_t(j, i-1) \geq \frac{1}{4}(R_t(1, j-1) + F_t(1, j-1)) + \frac{i-j+1}{4} \\ &\geq \frac{1}{4}(R_t(1, j-1) + F_t(1, j-1)) + \frac{1}{4}(R_t(j, i) + F_t(j, i)) = \frac{1}{4}(R_t(1, i) + F_t(1, i)), \end{aligned}$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z tego, że $i-j+1$ to liczba wszystkich znaków między poziomem j a i .

Zauważmy, że kolumna dostaje R tylko wtedy, gdy na danym poziomie przecina ją jakiś przedział. Jednocześnie wszystkie takie przedziały się nachodzą (tworzą klikę). Zatem

$$\omega \geq R_s(1, m') \geq \frac{1}{4}(R_s(1, m') + F_s(1, m')) = \frac{1}{4}(m' - T_s(1, m')) \geq \frac{m'}{8} \geq \frac{m}{8},$$

co kończy dowód. $\square$

Definicja 58. Poset P rozszerza poset Q , jeśli mają ten sam zbiór podkładowy oraz $x \leq y$ w Q implikuje $x \leq y$ w P . W szczególności $\text{Inc}(P) \subseteq \text{Inc}(Q)$.

Lemat 15. Dla każdego $k \geq 2, w \geq 1$ i posetu P , który jest $(k+k)$ -wolny i ma szerokość co najwyżej w istnieje poset przedziałowy Q o $\text{width}(Q) \leq (2k-3)w$ taki, że P rozszerza Q .

Dowód. Dla $k = 2$ jest to oczywiste. Dla $k \geq 3$ rozważmy podział P na łańcuchy $C_1, \dots, C_w$. Zbiór $X \subseteq P$ nazywamy blokiem, jeśli $|X \cap C_i| = \min(|C_i|, 2k-3)$ dla każdego C_i oraz elementy $X \cap C_i$ są przedziałem w C_i . Definiujemy $\text{up}(X)$ jako zbiór takich $y \in P$, że $y \in C_i \setminus X$ dla pewnego i oraz $y > x$ dla każdego $x \in C_i \cap X$. Element $v \in X$ jest dobry w X , jeśli $v < u$ dla każdego $u \in \text{up}(X)$. Pokażemy, że jeśli $\text{up}(X) \neq \emptyset$, to dla pewnego $i \in [w]$ mamy $\text{up}(X) \cap C_i \neq \emptyset$ i $\min(X \cap C_i)$ jest dobry w X .

Po ewentualnym przenumowaniu niech $C_1, \dots, C_{w'}$ będą łańcuchami podziału, które mają nie-puste przecięcie z $\text{up}(X)$ ($w' \geq 1$, bo inaczej $\text{up}(X) = \emptyset$). Ustalmy $i \in [w']$. Niech d_i będzie najmniejszym elementem $\text{up}(X) \cap C_i$. Zbiór $X \cap C_i$ ma rozmiar $2k-3 \geq k$ (inaczej X zawiera całe C_i), a więc możemy rozważyć L_i składający się z k jego najmniejszych elementów. Niech a_i będzie najmniejszym elementem L_i , a c_i największym. Przez b_i oznaczamy największy element $L_i \setminus \{c_i\}$. Mamy $a_i < b_i < c_i < d_i$. Przez U_i oznaczamy zbiór k największych elementów $(X \cap C_i) \cup \{d_i\}$, czyli zbiór $(C_i \cap (X \setminus L_i)) \cup \{b_i, c_i, d_i\}$. Zdefiniujemy skierowany graf D na wierzchołkach $[w']$ tak, że krawędź $i \rightarrow j$ istnieje dokładnie wtedy, gdy $a_i \not\leq d_j$ w P .

Założmy nie wprost, że w D jest cykl $(i_1, \dots, i_n)$. Indukcyjnie pokażemy, że $c_{i_1} > b_{i_p}$ dla $p \leq n$. Dla $p = 2$ zauważmy, że L_{i_1} i U_{i_2} są rozłącznymi łańcuchami długości k , a więc musi istnieć $u \in L_{i_1}$ porównywalny z pewnym $v \in U_{i_2}$. Mamy $a_{i_1} \leq u$ i $v \leq d_{i_2}$ oraz $a_{i_1} \not\leq d_{i_2}$, a więc $u > v$. Zatem $c_{i_1} \geq u > v \geq b_{i_2}$. W kroku indukcyjnym zakładamy $c_{i_1} > b_{i_{p-1}}$ dla $p \geq 3$ i rozważamy łańcuch $L'_{i_{p-1}} = \{c_{i_1}\} \cup (L_{i_{p-1}} \setminus \{c_{i_{p-1}}\})$. Identyczny jak przedtem argument dla $L'_{i_{p-1}}$ i U_{i_p} daje $c_{i_1} > b_{i_p}$. Ostatecznie mamy $c_{i_1} > b_{i_n}$, czyli $d_{i_1} > a_{i_n}$, a więc nie ma krawędzi $i_n \rightarrow i_1$ – sprzeczność.

Z acykliczności D istnieje ujęcie – wierzchołek i bez wychodzących krawędzi. Wtedy nie zachodzi $a_i \not\leq d_j$ dla żadnego j , a więc $a_i < d_j$ dla każdego j , czyli a_i jest dobry w X .

Teraz zdefiniujemy ciąg bloków $B_1, \dots, B_q$. B_1 składa się z $\min(|C_i|, 2k-3)$ najmniejszych elementów w C_i dla każdego C_i . Mając zdefiniowane B_j jeśli $\text{up}(B_j) = \emptyset$, to kończymy i ustalamy $q = j$. W przeciwnym przypadku wybieramy dobry element u należący do pewnego C_i i ustalamy v jako $\min(\text{up}(B_j) \cap C_i)$. Definiujemy $B_{j+1} = B_j \setminus \{u\} \cup \{v\}$. Zauważmy, że każdy element posetu x można przypisać do przedziału $I_x \subseteq [q]$ takiego, że $x \in B_j \iff j \in I_x$. Niech Q będzie posetem przedziałowym na tak zdefiniowanych przedziałach.

Rozważmy antyłańcuch $A \subseteq Q$. Wszystkie przedziały z A przecinają się w jednym punkcie, a więc istnieje B_i , które zawiera elementy P odpowiadające przedziałom z A . Zatem $|A| \leq |B_i| \leq (2k-3)w$. To daje odpowiednie ograniczenie na szerokość Q . Rozważmy $[i, j] < [i', j']$ w Q i odpowiadające im elementy $u, v \in P$. Wtedy $v \in \text{up}(B_j)$ (bo pojawia się w bloku po j) oraz $u \in B_j$ i $u \notin B_{j+1}$. Z tego wynika, że u jest dobry w B_j , czyli $u < v$. To pokazuje, że P rozszerza Q i kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 27 (Dujmović, Joret, Wood 2011). Dla każdego $k \geq 2$ First-Fit używa co najwyżej $8(2k-3)w$ łańcuchów przy podziale $(k+k)$ -wolnych porządków o szerokości w .

Dowód. Pokażemy właściwie, że dla każdego grafu G będącego podgrafem (na tym samym zbiorze wierzchołków) grafu przedziałowego G' o $\omega(G') \leq \omega$ istnieje graf przedziałowy H o $\omega(H) \leq \omega$ taki, że $\text{FF}(G) \leq \text{FF}(H)$ (First-Fit działa na G niegorzej niż na H). To da nam tezę, bo dzielenie posetu na łańcuchy to kolorowanie jego grafu nieporównywalności, a przedtem pokazaliśmy, że graf

nieporównywalności posetu $(k + k)$ -wolnego rozszerza pewien graf przedziałowy o o liczbie klikowej pasującej do naszej tezy.

Rozważmy kolorowanie First-Fit grafu G za pomocą c kolorów. Niech $V_1, \dots, V_c$ będą zbiorami wierzchołków o odpowiednich kolorach. Niech $\{I(v)\}_{v \in V(G')}$ będzie reprezentacją przedziałową G' . Niech $W_{i,1}, \dots, W_{i,n_i}$ będą spójnymi składowymi w $G'[V_i]$ (w G jest to zbiór niezależny, ale w G' pojawiają się nowe krawędzie). Ze zbiorem W_{ij} utożsamiamy przedział $I_{ij} = \bigcup_{v \in W_{ij}} I(v)$. Przez H oznaczamy graf przedziałowy na tak zdefiniowanych przedziałach.

Zauważmy, że jeśli przedziały z H parami się przecinają, to przecinają się w jednym punkcie. Jednak każdy przedział z H jest sumą przedziałów z G' , a więc z każdego przedziału z H można wybrać przedział z G' zawierający w sobie ten punkt. Te przedziały z G' parami się przecinają. Zatem każdej klicie z H odpowiada równoliczna klika z G' , czyli $\omega(H) \leq \omega(G')$.

Zdefiniujmy kolorowanie $C(I_{ij}) = i$. Pokażemy, że jest to kolorowanie First-Fitowe, co pokaże, że $c \leq \text{FF}(H)$ (jeśli ułożymy wierzchołki w kolejności ich kolorów, to First-Fit nada im takie kolory jak to kolorowanie). Rozważmy element I_{ik} . Odpowiada on pewnym elementom $V(G)$ o kolorze i . Weźmy taki wierzchołek v . Dla każdego $j < i$ istnieje $u \in V(G)$ o kolorze j połączony krawędzią z v . W G' taki wierzchołek u jest przedziałem przecinającym się z przedziałem wierzchołka v . Zatem elementy H , w których zawierają się te przedziały przecinają się. Czyli I_{ik} ma sąsiada w każdym kolorze $j < i$. To kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 28 (Felsner, Micek, Ueckerdt 2014). Istnieje algorytm on-line kolorujący poprawnie wypukłe zbiory rozpięte między dwoma liniami (stykające się z tymi liniami), który używa $O(\omega^3)$ kolorów, gdzie ω jest liczbą klikową grafu przecięć tych zbiorów.

Dowód. Wskażemy strategię używającą $\binom{\omega+1}{2} 24\omega$ kolorów. Będziemy kolorować trójkami (α, β, γ) , gdzie $\alpha, \beta, \gamma \geq 1$ są liczbami całkowitymi, $\gamma \leq 24\omega$ i $\alpha + \beta \leq \omega + 1$. Rozważmy linie L_1, L_2 , między którymi będą rozpięte nasze zbiory. Dla zbioru V przez v^1, v^2 oznaczamy jego punkt przecięcia odpowiednio z L_1, L_2 . Przez s_v oznaczamy „odcinek bazowy” łączący v^1 z v^2 . Ciąg zbiorów $(V_1, \dots, V_k)$ nazywamy i -rosnącym, jeśli $v_1^i \leq \dots \leq v_k^i$ na linii L_i . Analogicznie definiujemy ciągi i -malejące.

Gdy prezydent prezentuje nowy zbiór V ustalamy wartości: α_V – długość najdłuższego ciągu już zaprezentowanych zbiorów, który jest 1-rosnący, 2-malejący i zaczyna się od V , β_V – to samo, tylko dla ciągów 1-malejących i 2-rosnących. Algorytm umieszcza V w X_{α_V, β_V} , a wewnątrz tego zbioru stosuje First-Fit. Jako że wszystkie odcinki bazowe w obu ciągach przecinają się, to mamy $\alpha_V + \beta_V \leq \omega + 1$ (mają jeden wspólny element).

Zauważmy, że segmenty bazowe elementów $X_{\alpha, \beta}$ są rozłączne. Załóżmy, że $s_v \cap s_u \neq \emptyset$ dla pewnych $V, U \in X_{\alpha, \beta}$. Wtedy jeśli $v^1 < u^1$ i $v^2 > u^2$, to można rozszerzyć 1-rosnący i 2-malejący ciąg zaczynający się od u o v , co jest sprzeczne z określeniem α . W przeciwnym przypadku analogiczna sprzeczność wynika z określenia β . Teraz pokażemy, że $X_{\alpha, \beta}$ jest $(3 + 3)$ -wolny (jako poset rozłączności zbiorów), co da nam ograniczenie na γ . Załóżmy, że w $X_{\alpha, \beta}$ jest są elementy x_1, x_2, x_3 które są parami rozłączne i parami przecinają się z parami rozłącznymi elementami y_1, y_2, y_3 . Ich segmenty bazowe są rozłączne, można więc mówić o kolejności segmentów, mając na myśli kolejność ich końców na którejkolwiek linii. Wśród pierwszych trzech segmentów są dwa z jednej grupy, powiedzmy x_1, x_2 . Wtedy w trzech ostatnich są dwa z drugiej grupy, powiedzmy y_1, y_2 (patrzac od końca). Teraz x_1 musi być rozłączny z segmentem x_2 , a y_1 z segmentem y_2 . Zatem x_1 jest rozłączny z y_1 , bo odpowiednie segmenty je od siebie oddzielają. To daje sprzeczność i kończy dowód. $\square$

Uwaga. Wiemy, że grafy nieporównywalności można reprezentować jako grafy przecięć krzywych rozpiętych między dwiema liniami. Umiemy wskazać ograniczenia dla prostszych klas grafów: gdy krzywe są liniami (posety o wymiarze 2) lub prostokątami (posety przedziałowe). Teraz mamy coś, co uogólnia obie te klasy.